

1. Пусть натуральное число x делится на числа $n_1, n_2, \dots, n_k$ (различные). Решите уравнение $n_1 + n_2 + \dots + n_k = x + 7$.

Решение

Любое число делится на 1 и на самого себя, поэтому сумма делителей числа x равна $x + 1 + y$. Учитывая исходное уравнение, получаем, что $y = 6$. $6 = 1 + 5$, $6 = 2 + 4$, $6 = 3 + 3$, $6 = 1 + 2 + 3$. Условию удовлетворяет только $6 = 2 + 4$. Значит число x имеет ровно четыре делителя и $x = 8$, и это единственное решение.

Критерий оценивания

Только ответ – 0 баллов.

Если ответ найден подбором, есть проверка найденного корня, но нет обоснования, что корень единственный – 2 балла.

Корень найден в ходе рассуждений о его делителях, имеются неточности в рассуждениях и нет обоснования, что число x не имеет других делителей, кроме 1, 2, 4 и x – 4-5 баллов.

Корень найден в ходе рассуждений о его делителях с полным обоснованием, но имеются неточности в рассуждениях и – 6-7 баллов.

2. Имеется четыре кучки камней: в двух кучках по 10 камней, в третьей – 20 камней, а в четвертой – 30 камней. Играют двое. Ходы делают по очереди. За один ход игрок может взять любое количество камней из любой кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Как играть, чтобы выиграть?

Решение

Выигрывает первый игрок.

Выигрышная стратегия состоит в уравнивании камней в кучках.

Первый игрок первым своим ходом забирает 10 камней из кучки, в которой 30 камней.

Первый игрок мысленно объединяет кучки в пары: в кучках первой пары по 10 камней, в кучках второй пары – по 20 камней.

Второй игрок каждым своим ходом вынужден нарушать равенство в одной из пар. Первый игрок следующим своим ходом это равенство восстанавливает.

Критерии оценивания

Только верный ответ – 0 баллов.

Только верный ответ и приведен пример игры – 0 баллов.

Записана идея об уравнивании камней в кучках, но дальнейшего продвижения нет – 2 балла.

Полное и обоснованное решение – 7 баллов.

3. Числовая последовательность задана следующей формулой

$$a_1 = 0, a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n, & \text{если } n - \text{четное.} \\ a_n + 2, & \text{если } n - \text{нечетное.} \end{cases}$$

Найдите a_{2025} .

Решение

1 способ. $a_1 = 0, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 6, a_5 = 12, a_6 = 14, a_7 = 28$ и т. д.

Элементы, имеющие нечетный номер можно задать формулой $2^m - 4$, где $m = 2, 3, 4, 5, \dots$

Значит элементу a_{2025} будет соответствовать номер $m = 1014$.

Ответ: $2^{1014} - 4$.

2 способ. Выразим нечетные члены последовательности через предыдущие нечетные члены.

$$a_3 = (a_1 + 2) * 2 = 2^2,$$

$$a_5 = (a_3 + 2) * 2 = 2^3 + 2^2,$$

$$a_7 = (a_5 + 2) * 2 = 2^4 + 2^3 + 2^2,$$

$$a_9 = (a_7 + 2) * 2 = 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2,$$

...

$a_n = 2^{\frac{n+1}{2}} + 2^{\frac{n+1}{2}-1} + \dots + 2^3 + 2^2$, где n – нечетное.

Значит, $a_{2025} = 2^{1013} + 2^{1012} + \dots + 2^3 + 2^2$,

что является суммой 1012 членов геометрической прогрессии с первым членом 4 и знаменателем 2, т.е. $a_{2025} = 2^{1014} - 4$.

Ответ: $2^{1014} - 4$.

Критерий оценивания

Только ответ – 0 баллов.

При решении 1 способом: получена формула $2^m - 4$ – 4 балла;

установлена связь между номерами элементов последовательности и m (или получена формула n -го члена последовательности) – 5 баллов.

При решении 2 способом получена формула $a_{2025} = 2^{1013} + 2^{1012} + \dots + 2^3 + 2^2$ без дальнейших продвижений – 4 балла

Ответ отличается от верного из-за арифметической ошибки – 6 баллов.

Обоснованно получен верный ответ – 7 баллов.

4. Существует ли параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого все 4 диагонали (AC_1 , BD_1 , CA_1 и DB_1) попарно перпендикулярны?

Решение

Пусть все эти диагонали попарно перпендикулярны.

- 1) $ACC_1 A_1$ параллелограмм, так как AA_1 и CC_1 равны и параллельны (боковые ребра параллелепипеда). В этом параллелограмме диагонали AC_1 и CA_1 перпендикулярны, значит $ACC_1 A_1$ ромб. Поэтому $AC = AA_1$.
- 2) $BDD_1 B_1$ параллелограмм, так как BB_1 и DD_1 равны и параллельны (боковые ребра параллелепипеда). В этом параллелограмме диагонали BD_1 и DB_1 перпендикулярны, значит $BDD_1 B_1$ ромб. Поэтому $BD = BB_1$.
- 3) Из выводов 1)-го и 2)-го пунктов следует, что $AC = BD$. А поскольку $ABCD$ параллелограмм (грань параллелепипеда), то **$ABCD$ – прямоугольник.**
- 4) $ABC_1 D_1$ параллелограмм, так как ребра AB и $C_1 D_1$ равны и параллельны. В этом параллелограмме диагонали AC_1 и BD_1 перпендикулярны, значит $ABC_1 D_1$ ромб. Поэтому $AB = BC_1$.
- 5) $CDA_1 B_1$ параллелограмм, так как ребра CD и $A_1 B_1$ равны и параллельны. В этом параллелограмме диагонали CA_1 и DB_1 перпендикулярны, значит $CDA_1 B_1$ ромб. Поэтому $A_1 B_1 = CB_1$.
- 6) Из выводов 4)-го и 5)-го пунктов следует, что $BC_1 = CB_1$. А поскольку $BCC_1 B_1$ параллелограмм (грань параллелепипеда), то **$BCC_1 B_1$ – прямоугольник.**
- 7) $BCD_1 A_1$ параллелограмм, так как ребра BC и $A_1 D_1$ равны и параллельны. В этом параллелограмме диагонали BD_1 и CA_1 перпендикулярны, значит $BCD_1 A_1$ ромб. Поэтому $BC = BA_1$.
- 8) $ADC_1 B_1$ параллелограмм, так как ребра AD и $B_1 C_1$ равны и параллельны. В этом параллелограмме диагонали AC_1 и DB_1 перпендикулярны, значит $ADC_1 B_1$ ромб. Поэтому $AD = AB_1$.
- 9) Из выводов 7)-го и 8)-го пунктов следует, что $BA_1 = AB_1$. А поскольку $ABB_1 A_1$ параллелограмм (грань параллелепипеда), то **$ABB_1 A_1$ – прямоугольник.**
- 10) Из выводов 3)-го, 6)-го и 9)-го пунктов следует, что параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ прямоугольный.

- 11) $AC = BD = AA_1 = a$ (из пунктов 1 и 2). $AB = BC_1 = CB_1 = b$ (из пунктов 4 и 5).
 $BC = AB_1 = BA_1 = c$ (из пунктов 7 и 8). Для удобства ввели обозначения. Тогда, учитывая что параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ прямоугольный, справедливы равенства

$$b^2 + c^2 = a^2$$

$$a^2 + c^2 = b^2$$

$$b^2 + a^2 = c^2$$

Сложим левые и правые части этих равенств и получим, что

$2 \times (a^2 + b^2 + c^2) = a^2 + b^2 + c^2$, что невозможно. Получили противоречие, значит предположение неверно, такого параллелепипеда не существует.

Критерии оценивания

Только верный ответ – 0 баллов.

Приведение примеров (в частности, показано, что у куба диагонали не попарно перпендикулярны) – 0 баллов.

Получено, что параллелепипед с попарно перпендикулярными диагоналями нужно искать среди прямоугольных параллелепипедов, но дальнейшего продвижения нет – 3 балла.

Задача решена верно и полностью – 7 баллов.

5. Решить в целых числах уравнение $1 + x + x^2 + x^3 = 2^y$.

Решение

$$1 + x + x^2 + x^3 = 2^y.$$

$(1 + x)(1 + x^2) = 2^y$, $(1 + x) = 2^c$, где c – целое неотрицательное число, $(1 + x^2) = 2^{y-c}$, где $y - c$ принимает целые неотрицательные значения

$$x = 2^c - 1, \quad x^2 = 2^{2c} - 2^{c+1} + 1,$$

с другой стороны, $x^2 = 2^{y-c} - 1$. Приравняем правые части: $2^{y-c} - 2^{2c} + 2^{c+1} = 2$.

Рассмотрим разные значения c .

1. Пусть $c=0$, тогда $y=x=0$.
2. Пусть $c \neq 0$, поделим полученное равенство на 2.

$$2^{y-c-1} - 2^{2c-1} + 2^c = 1,$$

$$2^{y-c-1}(1 - 2^{3c-y} + 2^{2c-y+1}) = 1,$$

$$\begin{cases} 2^{y-c-1} = 1, \\ 1 - 2^{3c-y} + 2^{2c-y+1} = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - c - 1 = 0, \\ 2c - y + 1 = 3c - y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

Откуда получаем $x = 1$.

Ответ: 1) $y=x=0$, 2) $x=1, y=2$.

Критерий оценивания

Только ответ – 0 баллов.

Если обоснованно получен ответ $y=x=0$ (например, ответ найден подбором и выполнена проверка) – 2 балла.

Если обоснованно получен ответ $y=x=0$ (например, ответ найден подбором и выполнена проверка) и есть продвижения в преобразованиях, приводящих ко второму решению, но преобразования не выполнены до конца – 3-6 баллов (в зависимости от продвижения в решении).

Обоснованно получены все корни уравнения – 7 баллов.