

**Решения заданий муниципального этапа
Всероссийской олимпиады школьников по математике
2024-2025 учебный год, 11 КЛАСС
Максимальное количество 35 баллов**

11.1. Докажите, что $b^2 > 4ac$, если $(a + b + c)(a - b + c) < 0$.

Доказательство:

Первое решение. Если $a = 0$ и $b = 0$, то условие имеет вид $c^2 < 0$, что неверно. Следовательно, если $a = 0$, то $b \neq 0$ и требуемое неравенство выполняется. Пусть $a \neq 0$. Рассмотрим квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$. Поскольку $y(1) = a + b + c$, а $y(-1) = a - b + c$, и, по условию, $y(1) \cdot y(-1) < 0$, то в точках $+1$ и -1 функция принимает значения разного знака и отлична от нуля. Это означает, что квадратичная функция имеет два корня, необходимым и достаточным условием которого является положительность дискриминанта, то есть $b^2 - 4ac > 0$, откуда и следует требуемое неравенство.

Второе решение. Из условия имеем $(a + b + c)(a - b + c) = ((a + c) + b)((a + c) - b) = (a + c)^2 - b^2 = a^2 + 2ac + c^2 - b^2 < 0$. Или $b^2 > a^2 + c^2 + 2ac$. Согласно неравенству о среднем арифметическом и среднем геометрическом $a^2 + c^2 \geq 2ac$, откуда $b^2 > a^2 + c^2 + 2ac > 2ac + 2ac = 4ac$.

11.2. Чемпионат лагеря по футболу проводился по круговой системе (каждый играл с каждым. За победу в матче давалось 2 очка, за ничью — 1, за поражение - 0. Если две команды набирали одинаковое количество очков, то место определялось по разности забитых и пропущенных очков. Чемпион набрал 7 очков, второй призер — пять, третий — 3 очка. Сколько очков набрала команда, занявшая последнее место?

Ответ: 2 очка

Решение. Пусть в чемпионате лагеря участвовало n команд. Тогда было сыграно всего $\frac{n(n-1)}{2}$ матчей. В каждом матче разыгрывается 2 очка, значит, всего было разыграно $n(n-1)$ очков. На долю трёх призёров приходится 15 очков, тогда на долю всех остальных участников $n(n-1) - 15$. Каждая из остальных команд, не ставших призёрами, не может набрать более трёх очков. Поэтому $n(n-1) - 15 \leq 3(n-3)$, $(n-2)^2 \leq 10$, $n \leq 5$.

Если бы в чемпионате участвовало 3 или 4 команды, то они набрали бы в сумме меньше 15 очков. Поэтому в чемпионате участвовало 5 команд, которые в сумме набрали 20 очков. На долю двух последних приходится 5 очков, значит одна из них набрала 3 очка, а другая - 2 очка (при варианте 4 и 1 меняется состав призёров)

11.3. Имеется 11 таких натуральных чисел, что суммы любых двух из них попарно различны. Докажите, что разность каких-то двух из них больше 27.

Доказательство: Предположим противное. Тогда разность между наименьшим и наибольшим числом не больше 27. Обозначим наименьшее из 11-и данных чисел через n . Значит, каждое из этих чисел находится на отрезке $[n; n + 27]$, причём число $n + 27$ может и не достигаться. Заметим, что все 11 чисел попарно различны, поскольку в противном случае среди попарных сумм будут и одинаковые, что противоречит условию задачи. Наименьшая возможная сумма пары чисел из набора равна $n + (n + 1) = 2n + 1$ а наибольшая сумма не превосходит числа $(n + 27) + (n + 26) = 2n + 53$. Всего различных сумм, таким образом, будет не более $2n + 53 - 2n = 53$. Но, с другой стороны, различных пар в наборе ровно $11 \cdot 10 : 2 = 55$. Значит, по принципу Дирихле среди них есть по крайней мере две с одинаковой суммой. Противоречие с условием задачи.

11.4. Медиана, биссектриса и высота, проведенные из вершины треугольника, делят угол при этой вершине на четыре равные части. Найдите углы треугольника.

Ответ: $22,5^\circ$, $67,5^\circ$ и 90° .

Решение. Пусть в треугольнике ABC высота BH , биссектриса BK и медиана BM делят угол B на четыре равные части, по x° каждый. Пусть S – середина AB . По свойству медианы прямоугольного треугольника, угол SHB также равен x° . SM – средняя линия, она параллельна BC , и, значит, угол SMB также равен x° . Из равенства углов SMB и SHB следует, что точки S , H , M и B лежат на одной окружности. Но угол BHM – прямой; значит, прямым будет и угол BSM (а, значит, и угол B). Итого, $4x = 90$, $x = 22,5$; $A = 90 - 22,5 = 67,5$.

Критерии: за правильный необоснованный ответ – 1 балл.

Замечание. Возможны и другие решения – как геометрические, так и

алгебраические. Однако решение типа «для треугольника с такими углами это верно – значит, углы – такие», при отсутствии полного обоснования, решение оценивается в 1 балл.

11.5. В некоторых клетках таблицы 10x10 расставлены несколько крестиков и несколько ноликов. Известно, что нет линии (строки или столбца), полностью заполненной одинаковыми значками (крестиками или ноликами). Однако, если в любую пустую клетку поставить любой значок, то это условие нарушится. Какое минимальное число значков может стоять в таблице?

Ответ: 98.

Решение. Пусть мы заполнили таблицу согласно условию, а клетка А свободна. Так как при постановке в нее любого значка должна получаться линия из одинаковых значков, то существует линия, содержащая ее, в которой все остальные клетки заполнены крестиками, и то же самое верно для ноликов (эти линии должны быть, естественно, строкой и столбцом). В частности, все свободные клетки стоят в разных строках и столбцах.

Предположим, что пустых клеток больше двух. Тогда для двух из них (скажем, для А и В) направления линии крестиков совпадают (то есть либо для обеих крестики стоят в их горизонталях, либо для обеих — в вертикалях) (см. рис.). Пусть крестики стоят в их столбцах, а нолики — в их строках; тогда в пересечении строки, содержащей А, со столбцом, содержащим В, должен стоять и крестик, и нолик (ибо это пересечение непусто); противоречие. Значит, пустых клеток не больше двух. Пример с двумя пустыми клетками приведен на рис. (вместо звездочек могут стоять любые значки).

A	o	o	?	o	o	o	o	o	o
x			x						
?	o	o	B	o	o	o	o	o	o
x			x						
x			x						
x			x						
x			x						
x			x						
x			x						
x			x						

	o	o	o	o	o	o	o	o	o
x		x	x	x	x	x	x	x	x
x	o	*	*	*	*	*	*	*	*
x	o	*	*	*	*	*	*	*	*
x	o	*	*	*	*	*	*	*	*
x	o	*	*	*	*	*	*	*	*
x	o	*	*	*	*	*	*	*	*
x	o	*	*	*	*	*	*	*	*
x	o	*	*	*	*	*	*	*	*
x	o	*	*	*	*	*	*	*	*

Критерии: Приведена оценка без примера – 4 балла, построен пример без оценки - 3 балла.