РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 11 КЛАССА

Задача 1. *Сколько решений имеет на интервале $[0;\ \pi/2)$ уравнение $tg(tgx) = 1$?*

Ответ. Бесконечно много. ***Решение.*** На интервале $[0; \pi/2)$ тангенс принимает все неотрицательные значения от 0 до $+\infty$, в том числе все значения вида $\pi/4+\pi k$, где k — натуральное число, при которых $\mathrm{tg}(\mathrm{tg}x) = 1$.

• Только ответ — *1 балл*.

Задача 2. *$ABCDA_1B_1C_1D_1$ и $SABCD$ — призма и пирамида с общим основанием $ABCD$ и равными объемами, лежащие по одну и ту же сторону от плоскости основания. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника ASC лежит в плоскости $A_1B_1C_1$.*

Решение. Так как объем призмы равен произведению площади основания на высоту, а объем пирамиды — трети произведения площади основания на высоту, высота пирамиды втрое больше высоты призмы. Значит, плоскость $A_1B_1C_1$ верхнего основания призмы втрое ближе к плоскости ABC, чем вершина S пирамиды, и потому делит в отношении $2:1$, считая от точки S, все отрезки, соединяющие точку S с точками плоскости ABC, в том числе и медиану треугольника ASC. Осталось заметить, что в том же отношении делит медианы треугольника точка их пересечения.

Задача 3. *Скоростное шоссе, по которому можно ехать со скоростью 150 км/ч, идет параллельно обычному, по которому можно ехать со скоростью 100 км/ч. Проехать 1 км по скоростному шоссе стоит 3 рубля, а по обычному — 1 рубль. Мише надо проехать из Ёлкина в Палкино, до которого 100 км. У него есть 250 рублей. За какое наименьшее время он может добраться до Палкина? Считаем, что разгон, торможение и переход с одного шоссе на другое происходят мгновенно.*

Ответ. За 45 минут. ***Решение.*** Понятно, что для того, чтобы как можно быстрее доехать до Палкина, нам надо проехать по скоростному шоссе как можно большее расстояние. Значит, мы должны проехать по скоростному шоссе такое расстояние x, чтобы оставшихся $250–3x$ рублей в точности хватило для проезда оставшихся $100–x$ километров до Палкина по обычному шоссе. Из уравнения $250–3x = 1\cdot(100–x)$ находим $x = 75$ км. Значит, наименьшее время, за которое Миша может добраться от Ёлкина до Палкина, составляет $75/150+(100–75)/100 = 3/4$ часа = 45 минут.

• Только ответ — *0 баллов*. Только ответ с верным планом проезда за наименьшее время — *2 балла*.

Задача 4. *Найдите все положительные целые числа a, большие 1, у которых куб суммы цифр равен a^2.*

Ответ. Единственное такое число — 27. ***Решение.*** В решении задачи 5 для 7 класса показано, что все искомые числа являются кубами натуральных чисел, и среди чисел, меньших 1000, единственным искомым является 27. Покажем, что среди чисел, не меньших 1000, искомых чисел нет. Пусть в десятичной записи числа a n знаков, где $n \ge 4$. Тогда $a \ge 10^{n-1}$, а сумма его цифр не превосходит $9n$. Покажем, что при всех $n \ge 4$ выполнено неравенство $(9n)^3 < 10^{2(n-1)}$ (*). При $n = 4$ имеем $36^3 < 100^3 = 10^{2\cdot(4-1)}$. Далее каждый раз с ростом n на единицу число $10^{2(n-1)}$ увеличивается в 100 раз, а число $(9n)^3$ — в $(n+1)^3/n^3 = ((n+1)/n)^3$ раз, что меньше 2^3, так как $(n+1)/n = 1+1/n < 2$. Поэтому правая часть в неравенстве (*) с ростом n растет быстрее левой, и это неравенство сохраняется.

• Только ответ — *1 балл*.

• Только ответ — *1 балл.*

Задача 5. *Каждый из десяти квадратных трехчленов $x^2+p_ix+q_i$ (i = 1, ..., 10) имеет два корня, а сумма любых двух из этих трехчленов не имеет корней. Каково наибольшее возможное количество отрицательных чисел среди чисел $p_1, p_2, \ldots, p_{10}, q_1, q_2, \ldots, q_{10}$?*

Ответ. 11. ***Решение.*** В решении задачи 5 для 10 класса показано, что корни x_i, y_i данных в условии трехчленов $T_i = x^2+p_ix+q_i$ можно, переставив, если надо, их номера, упорядочить так: $x_1 > y_1 > x_2 > y_2 > \ldots > x_{10} > y_{10}$ (*). Чтобы свободный член $q_i = x_iy_i$ трехчлена T_i был отрицательным, необходимо, чтобы 0 находился между x_i и y_i. Из неравенств (*) следует, что такой свободный член может быть только один. Коэффициенты при x могут быть отрицательными все, если все корни, кроме y_{10}, положительны, и $x_{10}+y_{10} > 0$. Таким образом, отрицательных коэффициентов у трехчленов T_i не больше 11. Пример, когда их ровно 11: $x_1 = 20$, $y_1 = 19$, $x_2 = 18$, …, $x_9 = 4$, $y_9 = 3$, $x_{10} = 2$, $y_{10} = -1$.

Задача 6. *Как нужно разместить на плоскости треугольник, чтобы его проекция на данную прямую имела наименьшую длину?*

Ответ. Так, чтобы его наименьшая высота была параллельна данной прямой. ***Решение.*** Если треугольник размещен так, как указано в ответе, то его проекция на данную прямую l равна его наименьшей высоте. Покажем, что проекция треугольника на любую другую прямую не короче этой высоты. Для этого проведем через вершины A, B и C треугольника перпендикуляры a, b и c соответственно к прямой l. Выберем обозначения так, чтобы прямая c лежала между a и b. Тогда проекция треугольника ABC на l будет равна расстоянию между a и b. Теперь опустим из каждой вершины треугольника перпендикуляры на прямые a и b. Один из них, опущенный из какой-то вершины X, будет лежать между двумя другими, и потому будет пересекать сторону с концами в двух других вершинах треугольника в точке Y, лежащей между прямыми a и b. Отрезок XY не больше расстояния между прямыми a и b и не меньше высоты, опущенной из вершины X на противолежащую сторону треугольника, а та — не меньше наименьшей высоты треугольника, что и завершает доказательство.