Задания муниципального этапа

всероссийской олимпиады школьников по математике

в 2024-2025 учебном году

11 класс

Критерии оценивания

Максимальное количество баллов: 35

Каждая задача оценивается в целое число баллов от 0 до 7.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

1. В усть-сысольской летописи 1608 года найдена странная запись:

$$\sqrt{1+2025\sqrt{1+2024\sqrt{1+2023\sqrt{1+\ldots\sqrt{1+1611\sqrt{1+1610\times 1608}}}}}}.$$

Вычислите значение выражения из летописи.

Ответ. 2024.

Решение. Заметим, что $1609^2-1=1610\times 1608$, то есть

$$1609=\sqrt{1+1610\times 1608},$$

$$1610=\sqrt{1+1611\times 1609}=\sqrt{1+1611\times\sqrt{1+1610\times 1608}},$$

$$1611=\sqrt{1+1612\times 1610}=\sqrt{1+1612\times\sqrt{1+1611\times\sqrt{1+1610\times 1608}}},$$

$$\ldots$$

$$2024=\sqrt{1+2025\sqrt{1+2024\sqrt{1+\ldots\sqrt{1+1611\sqrt{1+1610\times 1608}}}}}.$$

Комментарий. Дан правильный ответ без объяснений – 0 баллов.

2. Найдите количество способов расставить 8 ладей на шахматной доске 8×8 так, чтобы каждая свободная клетка доски была побита хотя бы одной ладьёй.

Ответ. $2\cdot 8^8-8!$

Решение. Предположим, что в какой-то горизонтали не стоит ни одной ладьи. Все клетки этой горизонтали должны биться какими-то ладьями, значит, в каждой вертикали должно стоять по ладье. Таким образом, либо во всех горизонталях стоит по одной ладье, либо во всех вертикалях стоит по одной ладье.

Посчитаем количество способов поставить 8 ладей так, чтобы в каждой горизонтали стояло по одной ладье. Ладью на первую горизонталь можно поставить одним из 8 способов (в любую из 8 клеток), на вторую горизонталь — тоже любым из 8 способов, независимо от постановки первой ладьи, и так далее. Значит, всего способов 8^8. Количество способов поставить ладьи так, чтобы в каждой вертикали стояло по одной ладье, также равно 8^8.

Сложим эти количества вариантов. Заметим, что дважды будут посчитаны те и только те варианты, когда и в каждой строке, и в каждом столбце стоит по одной ладье. Таких способов ровно 8!

Значит, общее количество способов равно $2\cdot 8^8-8!$

Комментарий. Сформулирован общий принцип подсчета, но получен неправильный ответ – 2 балла.

3. Гипотенуза прямоугольного треугольника является стороной квадрата, расположенного вне треугольника. Найдите расстояние между

вершиной прямого угла треугольника и центром квадрата, если сумма катетов треугольника равна d.

Ответ. $\frac{d\sqrt{2}}{2}$.

Решение.

В четырехугольнике $AOBC$ сумма углов O и C равна 180^0, значит, около этого четырехугольника можно описать окружность (рис. 1). Тогда $\angle ACO = \angle ABO = 45^0$, $\angle AOC = \angle ABC$ (вписанные в окружность и опираются, соответственно, на равные дуги).

Тогда $\Delta CAO \sim \Delta CKB$ по двум углам ($\angle ACO = \angle KCB$, $\angle AOC = \angle KBC$). Следовательно, $\frac{CO}{CB} = \frac{AC}{CK} \Rightarrow CO = \frac{CB \cdot AC}{CK}$.

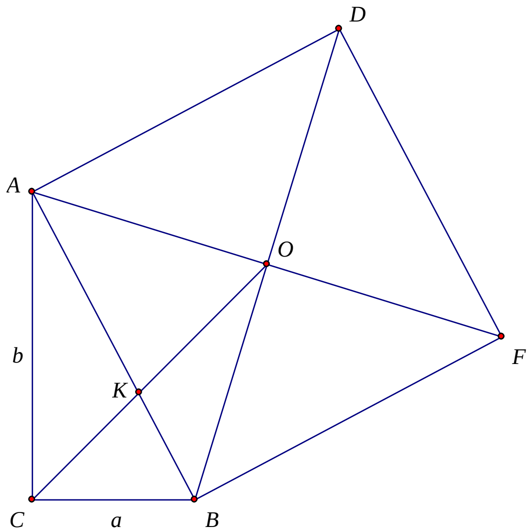

Рис 1.

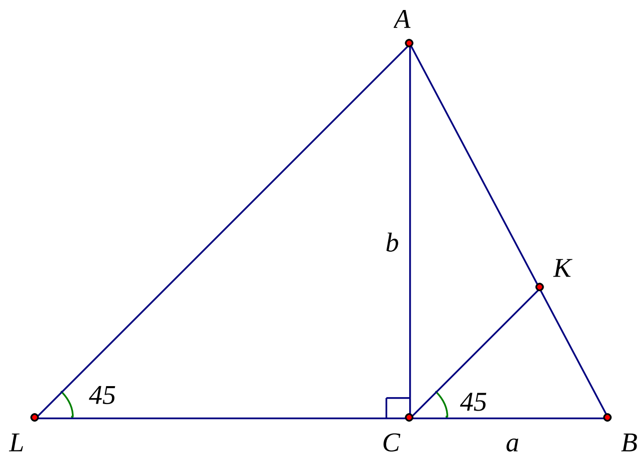

Рис 2.

Пусть $CB = a$, $CA = b$. Найдем CK (рис. 2). Если провести $AL \parallel CK$, то из прямоугольного равнобедренного треугольника ACL получаем: $AL = b\sqrt{2}$.

Из подобия треугольников BAL и BKC (по двум углам, $\angle B$ – общий, $\angle ALC = \angle KCB$ как соответственные при двух параллельных прямых и секущей) следует: $\frac{CK}{AL} = \frac{BC}{BL}$, $\frac{CK}{b\sqrt{2}} = \frac{a}{a+b}$. Следовательно, $CK = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.

Учитывая, что по условию $a + b = d$, получаем:

$$CO = \frac{ab(a+b)}{ab\sqrt{2}} = \frac{a+b}{\sqrt{2}} = \frac{d\sqrt{2}}{2}.$$

Комментарий. Доказано подобие треугольников – 2 балла.

4. На острове рыцарей и лжецов 1001 посёлок. В каждом посёлке живут либо только рыцари, либо только лжецы. Некоторые посёлки соединены дорогами, причём от любого посёлка можно добраться до любого другого, а всего на острове ровно 1000 дорог. Жители каждого из посёлков сделали следующие утверждения:

1. От нашего посёлка ведут дороги хотя бы в три других посёлка.
2. От нашего посёлка ведут дороги хотя бы в два посёлка лжецов.

Какое наименьшее количество посёлков лжецов может быть на острове?

Ответ. 601 посёлок.

Решение. Приведём пример, когда посёлков лжецов ровно 601. Будем строить его пошагово. Вначале рассмотрим два посёлка рыцарей, соединённых между собой и четыре посёлка лжецов, по два на каждый посёлок рыцарей. Далее на каждом шаге будем заменять один из посёлков лжецов на такую же конструкцию, т.е. прибавлять два посёлка рыцарей и три посёлка лжецов. Таким образом, количество посёлков рыцарей будет равно 2(k+1), а количество посёлков — 3(k+1)+1, где k — количество совершённых операций. При k=199 получим 400 посёлков рыцарей и 601 посёлок лжецов.

Оценка. Докажем, что меньшего количества посёлков лжецов быть не может. Заметим, что посёлки лжецов могут быть соседними только с одним или двумя другими посёлками. Обозначим за a количество посёлков лжецов, соединённых с одним другим посёлком, за b — количество посёлков лжецов, соединённых с двумя другими посёлками, а за c — количество посёлков рыцарей.

Просуммируем количество дорог, выходящих из посёлков. Так как дорог ровно 1000, то эта сумма будет равна равна 2000, то есть $a+2b+3c\leqslant 2000$. Обозначим за s количество дорог между посёлками рыцарей и лжецов. Так как из каждого посёлка рыцарей выходит хотя бы две дороги в посёлки лжецов, то $s\geqslant 2c$. С другой стороны, $a+2b\geqslant s$. Таким образом, $a+2b\geqslant s\geqslant 2c$. Подставляя это неравенство в предыдущее, получаем

$$2000 \geqslant a+2b+3c \geqslant 5c,$$

откуда $c \leqslant 400$. Раз посёлков рыцарей на острове не больше 400, то посёлков лжецов – не меньше, чем 1001–400=601.

Комментарий. Верный ответ без объяснения – 0 баллов. Показана оценка – 4 балла.

5. На координатной плоскости нарисовано n парабол, являющихся графиками квадратных трёхчленов; никакие две из них не касаются. Они делят плоскость на несколько областей, одна из которых расположена над всеми параболами. Докажите, что у границы этой области не более 2(n–1) «углов» (то есть точек пересечения пары парабол).

Решение. Индукция по n. База. При $n = 1$ утверждение очевидно.

Шаг индукции. Пусть $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ – данные квадратные трёхчлены ($n \geq 2$), причём $f_n(x)$ – трёхчлен с минимальным старшим членом (если таких несколько, то любой из них). Обозначим границу нашей области через T. Можно считать, что T содержит участки всех графиков.

Пусть S – множество всех таких чисел a, что точка множества T с абсциссой a лежит на графике трёхчлена $f_n(x)$. Иначе говоря, число a принадлежит S тогда и только тогда, когда выполнены неравенства $f_n(a) \geq f_i(a)$ при всех $i = 1, 2, ..., n-1$. Обозначим через S_i множество всех решений i-го неравенства; тогда $S = S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_{n-1}$. Поскольку каждый трёхчлен $f_n(x) - f_i(x)$ либо обладает отрицательным старшим коэффициентом, либо является на самом деле линейным, S_i – это либо отрезок (возможно, вырожденный), либо луч, либо вся прямая. Значит, и S является множеством такого же вида.

Итак, у T *не более* двух «углов», принадлежащих графику $f_n(x)$. Если мы удалим этот график, исчезнут эти углы (и, возможно, появятся новые). При этом по предположению индукции у новой области будет *не более* $2(n-2)$ «углов»; значит, исходная имела не более $2(n-2)+2 = 2(n-1)$ «углов».

Комментарий. Показано, что множество всех значений x, при которых точка множества T лежит на графике трёхчлена $f_n(x)$, есть отрезок, луч или прямая – 3 балла.