11 класс

1. Есть 18 карточек с числами 2, 4, 8, ..., 2^{18} . Из них составляют 9 дробей, у которых числитель и знаменатель одна из карточек. При этом каждую из карточек используют ровно один раз. Какое наименьшее целое значение может иметь сумма таких дробей?
   Ответ: 1.
   Решение. Так как сумма положительна, то меньше 1 получить нельзя.
   Пример: $2^{13}/2^{14} + 2^2/2^4 + 2^3/2^6 + 2^1/2^5 + 2^7/2^{12} + 2^8/2^{15} + 2^9/2^{16} + 2^{10}/2^{17} + 2^{11}/2^{18} = 1$.
2. Полоска из 2024 клеток заполнена нулями. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход разрешается любой ноль заменить на единицу. Но после каждого хода все блоки из нулей должны быть разной длины и все блоки из единиц тоже (при этом блок из нулей и блок из единиц могут иметь одинаковую длину). Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Покажите, что один из игроков может победить, как бы ни играл соперник. (Блоком из единиц называется несколько подряд стоящих единиц таких, что слева и справа от них стоит 0, либо край полоски)
   Решение. Пронумеруем клетки полоски слева направо.
   Первым ходом Петя пишет единицу в клетку номер 1. Вася вынужден поставить единицу в клетку номер 2, иначе образуется два блока из единиц длины 1. В ответ Петя ставит единицу в клетку номер 1014, и у Васи нет ответного хода. Действительно, после любого его хода образуется либо два блока из единиц длины 1, либо два блока из единиц длины 2, либо два блока из нулей длины 1010.
3. Выписали n наименьших собственных делителей некоторого натурального числа. Затем каждый делитель увеличили на 1 и получились n наименьших собственных делителей некоторого другого натурального числа. При каком наибольшем натуральном n такое возможно? (Собственным делителем натурального числа N называется всякий его натуральный делитель отличный от 1 и от N)
   Ответ: 3.
   Решение. Пример. У числа 16 три наименьших собственных делителя это 2, 4, 8, а у числа 45 это 3, 5, 9.
   Оценка. Предположим что $n > 3$. Заметим, что все изначально выписанные собственные делители чётны, иначе второе число должно быть четным и иметь наименьший собственный делитель 2. Но, очевидно, что во второй тройке собственных делителей все числа больше 2. Значит, все выписанные изначально делители — степени двойки, ибо иначе у делителя есть нечётный делитель >1, который обязан быть выписан перед рассматриваемым делителем.
   Но тогда выписаны 2, 4, 8, 16 (и может что-то еще) и значит 4 наименьших делителя некоторого числа есть 3, 5, 9, 17. Но это невозможно, так как такое число кратно 15, так как делится на 3 и 5.
4. В треугольнике ABC на сторонах AB, BC и AC выбраны точки K, L и M соответственно так, что $\angle BLK = \angle CLM = \angle BAC$. Отрезки BM и CK пересекаются в точке P. Докажите, что четырехугольник $AKMP$ – вписанный.
   Решение. Четырехугольник $ABLM$ — вписанный, так как $\angle BLM + \angle BAM = \angle BLM + \angle CLM = 180°$. Тогда $\angle LBM = \angle LAM$ (эти углы опираются на одну дугу окружности $ABLM$).
   Аналогично, $\angle LCK = \angle LAK$. Складывая последние два равенства, получаем, что
   $\angle LBM + \angle LCK = \angle LAM + \angle LAK = \angle MAK$, откуда
   $\angle BPC = 180° - (\angle LBM + \angle LCK) = 180 - \angle MAK$ (первое равенство получено из суммы углов треугольника BPC). Углы MPK и BPC — вертикальные, поэтому $\angle MPK = \angle BPC = 180° - \angle MAK$, значит, четырехугольник $AKMP$ – вписанный.

5. Есть клетчатая полоска длины 2024. Можно выбрать любую пустую клетку и записать в неё число — количество соседних по стороне клеток, в которых уже стоят числа. (Например, если бы была полоска длины 4, и сначала записали число в 3-ю клетку, потом в 1-ю, потом во 2-ю, потом в 4-ю, то получилась бы последовательность 0, 2, 0, 1) Сколько разных последовательностей из 2024 чисел можно получить?
Ответ: 2^{2023}.
Решение. Каждый раз, когда будем записывать число в клетку будем проводить стрелку из этой клетки во все пустые соседние. В итоге между каждыми двумя клетками будет проведена стрелка.
Для каждой последовательности из 0, 1, 2 существует ровно одна последовательность из стрелок. Из каждой клетки с 0 будет выходить две стрелки, в каждую клетку с 2 будет входить 2 стрелки, стрелки в блоке из единицам (то есть между клетками с единицами) будут такими же, как с краев от этого блока (с одного края от блока из единиц будет обязательно стоять 0, с другого края — 2).
Каждой последовательности из стрелок будет соответствовать ровно одна последовательность из 0, 1, 2. В клетке, из которой выходит две стрелки стоит 0, в клетке, в которую входит 2 единицы стоит 2, в остальных 1.
Таким образом имеется взаимно однозначное соответствие из между возможными (то есть которые можно получить в ходе данного процесса) последовательностями из 0, 1 и 2 и всевозможными последовательностями из стрелок, значит их количества равны.
Количество всевозможных последовательностей из стрелок равно 2^{2023}, так как всего стрелок 2023 и на каждом месте может быть стрелка влево, либо стрелка вправо.