

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
КУРГАНСКАЯ ОБЛАСТЬ
2024–2025 учебный год
11 класс

Каждое задание оценивается в 7 баллов.

Время выполнения – 235 минут.

Максимальный балл – 35.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное (верное) решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

***Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям**

При оценивании заданий следует придерживаться указаний, данных в комментариях к данной задаче или к данному способу решению задачи.

Нельзя уменьшать количество баллов за то, что решение слишком длинное. Исправления в работе (зачеркивания ранее написанного текста) также не являются основанием для снятия баллов. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

11.1. В кондитерский лицей поступили 11 мальчиков и несколько девочек – причём некоторые из них были ранее знакомы между собой. На 1 сентября директор лицея принес большой пакет со 165 конфетами. Каждая девочка дала по конфете (из пакета) каждому знакомому ей мальчику, а затем каждый мальчик дал по конфете (из пакета) каждой незнакомой ему девочке. После этого конфеты в пакете закончились. Сколько девочек поступило в лицей?

Ответ. 15 девочек.

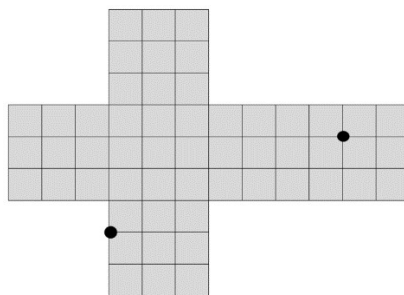
Решение 1. Пусть каждая девочка заберёт обратно конфеты, которые она отдала мальчикам. Таким образом, каждая девочка получит по конфете от каждого знакомого мальчика (которые она забрала), а также по конфете от каждого незнакомого мальчика (которые они сами ей отдали). Тогда каждая девочка получит ровно по одной конфете от каждого мальчика, т. е. суммарно 11 конфет. Так как всего конфет было 165, то девочек ровно 15.

Решение 2. Построим двудольный граф знакомств. В одной доле будут вершины, соответствующие мальчикам, а в другой доле — вершины, соответствующие девочкам. Если мальчик и девочка были уже знакомы, то будем соединять соответствующие

вершины ребром синего цвета, а если незнакомы — то ребром красного цвета. Тогда каждая девочка отдала столько конфет, сколько из соответствующей вершины выходит синих рёбер, а каждый мальчик отдал столько конфет, сколько из соответствующей вершины выходит красных рёбер. Заметим, что при этом каждое ребро (и красное, и синее) участвовало ровно в одной передаче. Поэтому количество конфет равно суммарному количеству рёбер. Если в классе учится x девочек, то всего рёбер между долями ровно $11x$. Значит, $11x=165$, т.е. $x=15$.

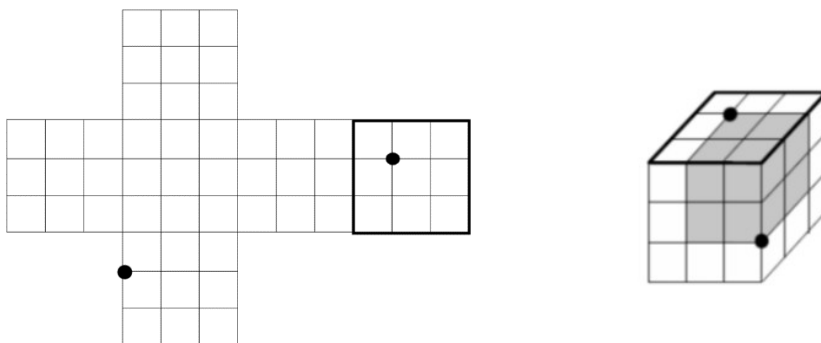
Комментарий. Дан правильный ответ без обоснования – 1 балл. При решении задачи с помощью графов правильно построен граф – 2 балла.

11.2. Рубик сделал развёртку куба размером $3 \times 3 \times 3$ и отметил на ней две точки – см. рисунок. Каково будет расстояние между этими точками после того, как Рубик склеит из развёртки куб?



Ответ. $2\sqrt{3}$.

Решение. Изобразим готовый кубик (изображение выбрано так, чтобы выделенная грань развёртки оказалась сверху). Данные точки — это две противоположные вершины кубика $2 \times 2 \times 2$. А в кубе $2 \times 2 \times 2$ диагональ имеет длину $2\sqrt{3}$.



Замечание. Не обязательно использовать то, что точки являются концами диагонали куба. Можно просто изобразить получившуюся картинку и найти длину требуемого отрезка, применив пару раз теорему Пифагора (или методом координат и т. п.)

Комментарий: Верное решение (достаточно верной картинкой и объяснения, как именно ищется расстояние между точками) – 7 баллов. Картинка изображена верно (возможно не с того ракурса, что в приведённом решении), но дальше расстояние найдено неверно – 3 балла. Приведён только верный ответ – 0 баллов. Допущена ошибка при определении местонахождения точек на кубе – 0 баллов.

11.3. Что больше $\cos\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$ или $\sin\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)$?

Ответ: первое число больше.

Решение: требуется сравнить величины $\cos\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Очевидно, что $\frac{1}{2}$ радиан и $\frac{\sqrt{3}}{2}$ радиан – углы первой четверти, на этих промежутках функция $y = \sin x$ возрастает, а $y = \cos x$ убывает. Заметим, что $\frac{1}{2} < \frac{\pi}{6}$, значит $\cos\frac{\sqrt{3}}{2} > \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Также легко показать, что $\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{\pi}{3}$, а значит $\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) < \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Таким образом, первое число больше.

Критерии проверки. Верное обоснованное решение – **7 баллов** ход решения верный, но недостаточно обоснованы неравенства типа $\cos\frac{\sqrt{3}}{2} > \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и/или $\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) < \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ – **5 баллов**. В решении используются верные неравенства типа $\cos\frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{\sqrt{3}}{2}$, которые никак не обоснованы, получен верный вывод – **3 балла**. Решение неверно или только ответ – **0 баллов**.

11.4. Банкиры Пётр и Василий играют в игру: они по очереди изымают средства из межбанковского фонда, первоначально содержащего 1331 золотую монету, причем первый ход делает Пётр и берёт 1 монету, а далее при каждом следующем ходе игрок берёт (по своему усмотрению) либо столько же монет, сколько взял другой игрок последним ходом, либо на одну больше. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход по правилам. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш независимо от ходов другого?

Ответ. Пётр.

Решение. Пусть Пётр независимо от действий Василия берёт первым ходом 1 монету, вторым – 2, третьим – 3 и т.д., увеличивая каждый раз количество взятых монет на 1. Это не противоречит правилам, так как при такой игре Петра Василий сможет первым ходом взять только 1 или 2 монеты, вторым – только 2 или 3 и т.д. Тогда после k -го хода Петра игроки возьмут монет не менее

$$(1 + 2 + \dots + k) + (1 + 2 + \dots + (k - 1)) = k^2$$

и не более

$$(1 + 2 + \dots + k) + (2 + 3 + \dots + k) = k(k + 1) - 1.$$

Заметим, что после 36-го хода Петра из фонда должно быть взято от $36^2 = 1296$ монет до $36 \cdot 37 - 1 = 1331$ монеты. Так как изначальный объем фонда – 1331 монета, то на 36-й ход Петра его в любом случае хватит. Но после этого хода в фонде останется от 0 до $1331 - 1296 = 35$ монет, следовательно, Василий не сможет сделать 36-й ход по правилам.

Комментарий. Дан правильный ответ без обоснования – 0 баллов. Показана, но не обоснована выигрышная стратегия Петра – 3 балла.

11.5. Двадцать бегунов два раза участвовали в забеге. Каждый раз все занимали разные места. Один из них сказал: “Мое место во втором забеге такое же, как в первом”, другой сказал: “Мое место во втором забеге на 1 выше, чем в первом”, следующий: “Мое место во втором забеге на 2 выше, чем в первом забеге”, ..., последний сказал: “Мое место во втором забеге было на 19 выше, чем в первом”. Какое наибольшее количество из этих утверждений могло оказаться правдой?

Ответ: 13.

Решение. Оценка. Переформулируем задачу. У нас есть числа $1, 2, \dots, 20$ и $x_1, x_2, \dots, x_{20}$. Оказалось, что числа $1+x_1, 2+x_2, \dots, 20+x_{20}$ — это числа $1, 2, \dots, 20$ в некотором порядке. Какое наибольшее количество различных чисел может быть среди отрицательных чисел из $x_1, x_2, \dots, x_{20}$. Допустим их 14. Тогда сумма их модулей равна минимум $0+1+\dots+13=91$. Но тогда сумма положительных чисел тоже должна быть равна 91. Но их максимальная сумма равна $14 \cdot 6 = 84$ (когда были числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, а стали 15, 16, 17, 18, 19, 20). Противоречие. (Аналогично для большего количества.)

Пример. 20, 19, 18, 17, 16, 15, 14, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 13, 12, 11, 10, 9, 8 (первый во второй раз прибежал 20-м, второй – 19-м и т. д.). Изменения мест были 19, 17, 15, 13, 11, 9, -1, -3, -5, -7, -9, -11, -13, -2, -4, -6, -8, -10, -12.