11 класс

11.1 Функция $f(x)$ при любом x, отличном от 0 и 1, удовлетворяет равенству:

$$(x-1)f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x-1}.$$

Найдите $f\left(\frac{2024}{2025}\right)$.

Решение:

Из условия задачи следует, что $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x-1}-(x-1)f(x)$ (*)

Подставим $\frac{1}{x}$ в равенство в условии задачи вместо x, получим

$$\left(\frac{1}{x}-1\right)f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=\frac{1}{\frac{1}{x}-1}.$$

Откуда, учитывая (*) имеем:

$$\frac{1-x}{x}\left(\frac{1}{x-1}-(x-1)f(x)\right)+f(x)=\frac{x}{1-x}$$

$$-\frac{1}{x}+\frac{(1-x)^2}{x}f(x)+f(x)=\frac{x}{1-x}$$

$$\left(\frac{(1-x)^2}{x}+1\right)f(x)=\frac{x}{1-x}+\frac{1}{x}$$

$$\left(\frac{(1-x)^2+x}{x}\right)f(x)=\frac{x^2+1-x}{(1-x)x}$$

$$(1+x^2-x)f(x)=\frac{x^2+1-x}{(1-x)}$$

Заметим, что выражение $1+x^2-x$ отлично от 0 (D = – 3<0), поэтому

$$f(x)=\frac{1}{1-x}$$

$$f\left(\frac{2024}{2025}\right)=\frac{1}{1-\frac{2024}{2025}}=2025$$

Ответ: 2025.

11.2 575 одинаковых блокнотов стоят дороже, чем 2024 одинаковые ручки, но дешевле, чем 2025 таких ручек. Определите наименьшую возможную стоимость ручки, если известно, что блокнот стоит целое число д.е. и ручка тоже стоит целое число д.е. (Здесь д.е. – денежные единицы).

Решение:

Пусть b д.е. – цена блокнота, p д.е. – цена ручки, тогда

$$\begin{cases} 575 \cdot b > 2024 \cdot p, \\ 575 \cdot b < 2025 \cdot p; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 23 \cdot 5^2 \cdot b > 2^3 \cdot 11 \cdot 23 \cdot p, \\ 23 \cdot 5^2 \cdot b < 3^4 \cdot 5^2 \cdot p; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25 \cdot b > 88 \cdot p, \\ 23 \cdot b < 81 \cdot p. \end{cases}$$

Так как и ручка, и блокнот стоят целое число д.е., то из последней системы следует:

$$\begin{cases} 25 \cdot b \geq 88 \cdot p + 1, \\ 23 \cdot b \leq 81 \cdot p - 1. \end{cases}$$

Умножим первое неравенство на 25, а второе на 23:

$$\begin{cases} 23 \cdot 25 \cdot b \geq 23 \cdot (88 \cdot p + 1), \\ 25 \cdot 23 \cdot b \leq 25 \cdot (81 \cdot p - 1). \end{cases}$$

Из последней системы следует, что

$$23 \cdot (88 \cdot p + 1) \leq 25 \cdot (81 \cdot p - 1).$$

Откуда имеем:

$$2024 \cdot p + 23 \leq 2025 \cdot p - 25,$$

$$p \geq 48.$$

Покажем, что при $p = 48$ существует целое значение b:

$$\begin{cases} 25 \cdot b > 88 \cdot 48, \\ 23 \cdot b < 81 \cdot 48; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b > \dfrac{88 \cdot 48}{25}, \\ b < \dfrac{81 \cdot 48}{23}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b > 168\dfrac{24}{25}, \\ b < 169\dfrac{1}{23}; \end{cases}$$

$$b = 169.$$

Ответ: 48.

11.3 Когда-то, в старые времена, в одном месте жили 100 крокодилов, 99 львов и 101 карявка. Крокодилы едят карявок, карявки едят львов, а львы едят крокодилов. Древнее заклятие запрещает убивать того, кто сам погубил нечётное число других животных. Сейчас в одном месте осталось всего одно животное. Кто это?

Решение:

1. Пусть последним остался крокодил.

Крокодилы убили всех карявок, а карявки съели всех львов. Т.к. львов нечетное количество, один из карявок должен был съесть нечетное количество львов. (Если бы все карявки съели только по четному числу львов, возможно 0, то общее количество съеденных львов было бы четным). А раз такой карявка нашелся - его не могли бы убить по заклятию – противоречие.

2. Если последний остался лев, это значит, что крокодилы убили всех карявок, а львы всех крокодилов. Погибших карявок было 101, значит какой-то из крокодилов зарубил нечетное число карявок (потому что если бы все крокодилы зарубили четное число карявок, возможно 0, то общее количество убитых карявок было бы четном). А значит этот крокодил не должен был умереть по заклятию – противоречие.

3. Если последним остался карявка.

Должны были погибнуть все крокодилы и все львы. Всех остальных 100 карявок убил 1 крокодил, остальные крокодилы убили по 0 карявок. 1 лев извел всех крокодилов и остальные львы по 0 крокодилов. 1 карявка съел всех 99 львов и выжил по заклятию.

Ответ: карявка.

11.4 Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = \frac{4}{3}. \end{cases}$

Решение:

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{a}(x; y; z)$ и $\overrightarrow{b}(1; 1; 1)$.

Найдем модули этих векторов:

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$\left|\overrightarrow{b}\right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ можно найти двумя способами:

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = x \cdot 1 + y \cdot 1 + z \cdot 1 = 2.$$

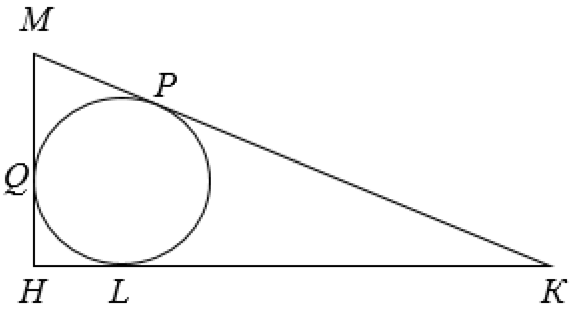
$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \cos\left(\widehat{\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b}}\right) = \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt{3} \cdot \cos\left(\widehat{\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b}}\right) = 2 \cdot \cos\left(\widehat{\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b}}\right).$$

Делаем вывод, $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b}}\right) = 1$, следовательно, $\widehat{\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b}} = 0$. Таким образом, векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ сонаправлены, а, значит, координаты векторов пропорциональны, то есть $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$. В силу равенства $x + y + z = 2$ заключаем, $x = y = z = \frac{2}{3}$.

Ответ: $x = y = z = \frac{2}{3}$.

11.5 Дан прямоугольный треугольник *МНК*, ∠*Н*=90°, периметр этого треугольника равен 24, а радиус вписанной окружности равен 2. Найти стороны этого треугольника.

Решение:



Пусть *MK=x*, *MH=y*, *KH=z*.

<u>1 способ</u>. Из равенства отрезков касательных, имеем

MP=MQ, *HQ=HL=2*, *KP=KL*.

Следовательно,

MK=MP+KP=MQ+KL

MK = (*MH* – *HQ*) + (*KH* – *HL*) = (*MH* – 2) + (*KH* – 2)

Составим систему уравнений: $\begin{cases} x = y - 2 + z - 2, \\ x + y + z = 24 \\ z^2 + y^2 = x^2. \end{cases}$,

$$\begin{cases} x = y + z - 4, \\ y + z = 24 - x, \\ z^2 + y^2 = x^2; \end{cases} \begin{cases} x = 20 - x, \\ y + z = 24 - x, \\ z^2 + y^2 = x^2; \end{cases} \begin{cases} 2x = 20, \\ y + z = 24 - x, \\ z^2 + y^2 = x^2; \end{cases} \begin{cases} x = 10, \\ y + z = 24 - x, \\ z^2 + y^2 = x^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 10, \\ y + z = 24 - 10, \\ z^2 + y^2 = 10^2; \end{cases} \begin{cases} x = 10, \\ y + z = 14, \\ z^2 + y^2 = 100; \end{cases} \begin{cases} x = 10, \\ z = 14 - y, \\ z^2 + y^2 = 100; \end{cases} \begin{cases} x = 10, \\ z = 14 - y, \\ (14 - y)^2 + y^2 = 100; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 10, \\ z = 14 - y, \\ 196 - 28y + y^2 + y^2 = 100; \end{cases} \begin{cases} x = 10, \\ z = 14 - y, \\ 196 - 28y + 2y^2 = 100; \end{cases} \begin{cases} x = 10, \\ z = 14 - y, \\ 98 - 14y + y^2 = 50; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 10, \\ z = 14 - y, \\ 98 - 14y + y^2 = 50; \end{cases} \begin{cases} x = 10, \\ z = 14 - y, \\ 48 - 14y + y^2 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = 10, \\ z = 14 - y, \\ y1 = 6, y2 = 8. \end{cases}$$

$x = 10$, $y = 6$, $z = 8$.

<u>2 способ</u>.

Воспользуемся тем, что $S_{\Delta МНК} = p\cdot r$, $p = \frac{24}{2}$=12 , далее составим систему с уравнениями аналогично первому способу решения.

Дополнительные критерии

11 класс

11.1 Не отмечено, что $1 + x^2 - x$ отлично от 0, снижать 1 балл.

Допущена арифметическая ошибка при верной последовательности всех шагов решения и преобразований, снижать 1 балл.

11.2 Просто записан верный ответ и вычислено, что при этом 575 одинаковых блокнотов стоят дороже, чем 2024 одинаковые ручки, но дешевле, чем 2025 таких ручек, ставить 1 балл.

Доказано, что искомая цена ручки 48 д.е., но не показано, что цена блокнота при этом выражается целым числом д.е., снижать 2 балла

11.4 Только верный ответ, ставить 1 балл

Отмечено, что первое уравнение – уравнение плоскости, а второе – уравнение сферы, но дальнейшего продвижения нет, ставить 2 балла.

Отмечено, что первое уравнение – уравнение плоскости, а второе – уравнение сферы, найдено расстояние от центра сферы до плоскости и показано, что оно равно радиусу сферы, то есть обоснована единственность решения системы, и приведен верный ответ, ставить 7 баллов.

При верном способе решения (через векторы или через плоскость и сферу, или иным способом), но допущена вычислительная ошибка, снижать 1 балл.

11.5 Только ответ – 0б.

Верная система уравнений обоснованно получена, но не решена – 3б.

Если система решена не верно при правильном геометрическом обосновании – 5б.