Ленинградская область

**Всероссийская олимпиада школьников по математике**

***Муниципальный этап***

**2024-2025 уч.год**

11 класс

Решения и ответы

1. Найдите все такие целые числа $n$, для которых число $\dfrac{n^2+1}{n+2}$ будет целым.

   *Решение.* Преобразуем дробь

   $$\frac{n^2+1}{n+2} = \frac{n^2-4+4+1}{n+2} = \frac{(n+2)(n-2)+5}{n+2} = n-2+\frac{5}{n+2}$$

   Полученное число будет целым тогда и только тогда, когда $n+2$ – целый делитель числа 5. Получаем четыре варианта.
   $n+2=-5,\ n=-7,$
   $n+2=-1,\ n=-3,$
   $n+2=1,\ n=-1,$
   $n+2=5,\ n=3.$

   *Ответ.* $-7$, $-3$, $-1$, 3.

2. Пусть $x_1, x_2, x_3$ – длины сторон некоторого треугольника, $f(x)$ – какой-то квадратный трехчлен. Известно, что $f(x_1) = f(x_2+x_3)$. Докажите, что $f(x_2) = f(x_1+x_3)$.

   *Решение.*

   Нам дано, что $x_1 < x_2 + x_3$. Известно, что для любого квадратного трехчлена выполняется следующее утверждение: если $f(t) = f(v)$, то или $t = v$, или $t + v = 2x_0$ ($x_0$ – абсцисса вершины соответствующей параболы). Но при $x_1 < x_2 + x_3$ может быть выполнен только второй случай, т.е. $x_1 + x_2 + x_3 = 2x_0$. Это равенство можно рассматривать как $(x_1 + x_3) + x_2 = 2x_0$, где $x_1 + x_3 > x_2$. Пользуясь тем же свойством квадратного трехчлена, получаем $f(x_1 + x_3) = f(x_2)$.

3. Компьютер заполнил таблицу $5\times5$ нулями. Далее компьютер выполнил серию шагов: за один шаг выбирал две соседние ячейки по вертикали или по горизонтали и либо прибавлял по единице к числам в выбранных ячейках, либо вычитал по единице из этих чисел. Через некоторое время оказалось, что суммы чисел во всех строках и во всех столбцах таблицы равны между собой. Докажите, что компьютер выполнил четное число шагов.
   (*Соседние ячейки имеют общую сторону по горизонтали или по вертикали. Сумма чисел в первой строке равна сумме чисел во второй строке и т.д.*)

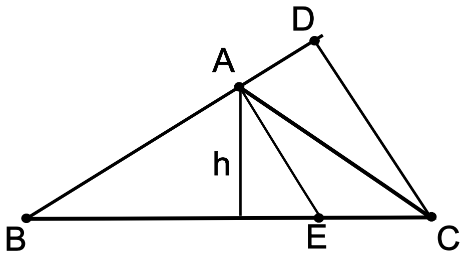
   *Решение.* Будем следить за вторым и четвертым столбцами. Если компьютер выбрал вертикальную пару ячеек, то четность суммы чисел в во втором и четвертом столбцах не изменилась (прибавил или вычел две единицы). Если компьютер выбрал горизонтальную пару ячеек, то четность суммы чисел в во втором и четвертом столбцах изменилась (к сумме чисел во втором и четвертом столбце прибавил или вычел одну единицу). В итоговой таблице сумма чисел во втором и четвертом столбце четна (во всех столбцах сумма одинакова). Поэтому горизонтальная пара ячеек выбиралась четное число раз.

   Аналогично доказывается, что вертикальная пара ячеек была выбрана четное число раз. Поэтому общее число шагов четно.

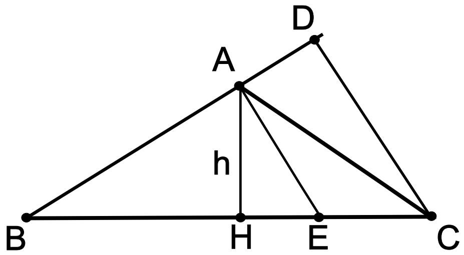
4. Треугольник $ABC$ – равнобедренный ($AB = AC$). Точка $D$ лежит на продолжении стороны $BA$ за точку $A$, точка $E$ лежит на $BC$; при этом отрезки $AE$ и $CD$ параллельны. Длина высоты, проведенной из точки $A$ на сторону $BC$, равна $h$. Докажите неравенство

$$BC \cdot CD \geqslant 4h \cdot CE$$

В каком случае достигается равенство?




*Решение.*




Так как $AE \parallel CD$, то

$$\frac{CD}{AE} = \frac{BC}{BE}$$

$$CD = \frac{AE \cdot BC}{BE}$$

Умножим и поделим эту дробь на $CE$.

$$CD = \frac{AE \cdot BC \cdot CE}{BE \cdot CE}$$

В прямоугольном треугольнике $AEH$ катет короче гипотенузы, поэтому

$$AE \geqslant h$$

Пользуясь неравенством о среднем арифметическом и среднем геометрическом, получаем

$$\left(\frac{BE + CE}{2}\right)^2 \geqslant BE \cdot CE$$

$$\left(\frac{BC}{2}\right)^2 \geqslant BE \cdot CE$$

Преобразуем это неравенство к заданному в условии, используя полученное выше неравенство.

$$BC^2 \geq 4BE \cdot CE$$

$$BE \cdot CE = \frac{AE \cdot BC \cdot CE}{CD}$$

$$AE \geqslant h$$

Отсюда

$$BC^2 \geqslant \frac{4AE \cdot BC \cdot CE}{CD}$$

$$BC \cdot CD \geqslant 4AE \cdot CE \geqslant 4h \cdot CE$$

Это и требовалось доказать. Равенство достигается, во первых, когда треугольник $AEH$ становится отрезком (высотой), и когда в неравенстве о средних достигается равенство, т.е. $BE = CE$. Оба эти условия достигаются одновременно, т.е. в случае, когда точка $E$ является серединой $BC$. Это возможно, так как треугольник $ABC$ – равнобедренный по условию.

5. Пусть $a_1, a_2, \ldots a_n$ и $b_1, b_2, \ldots b_n$ – положительные величины, причем

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n < b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

Известно, что если поменять местами любую пару слагаемых $a_k$ и $b_m$, то знак неравенства изменится на противоположный:

$$a_1 + a_2 + \ldots + b_m + \ldots + a_n \geqslant b_1 + b_2 + \ldots + a_k + \ldots + b_n$$

Найдите все $n$, при которых такое возможно.

*Решение.*
Первый способ.

Расставим слагаемые по возрастанию. Без потери общности

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots a_{n-1} \leqslant a_n$$

$$b_1 \leqslant b_2 \leqslant b_3 \leqslant \ldots b_{n-1} \leqslant b_n$$

Введем обозначение $X$ для разности сумм:

$$X = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + b_n - a_1 - a_2 - a_3 - \ldots - a_{n-1} - a_n > 0$$

Из условия, из первого неравенства, мы получили, что $X > 0$.

По условию, если поменять местами любую пару слагаемых $a_k$ и $b_m$, то знак неравенства изменится на противоположный.
Пусть $m = 1$ и $k = n$. Тогда

$$a_n + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + b_n - b_1 - a_1 - a_2 - a_3 - \ldots - a_{n-1} > 0$$

Это означает, что $b_1 > a_n$.

Обозначим $d = b_1 - a_n$.

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + b_1 \geqslant b_2 + \ldots + a_k + \ldots + b_n + a_n$$

т.е.

$$(b_2 + \ldots + a_k + \ldots + b_n + a_n) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + b_1) \leqslant 0$$

Учтем в этих неравенствах $X$ и $d$.

$$X = (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + b_n) - (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n) =$$

$= (b_2+b_3+\ldots+b_{n-1}+b_n+a_n)-(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}+b_1)+2b_1-2a_n \leqslant 2b_1-2a_n = 2d$

С другой стороны,

$$X = (b_1 - a_n) - (b_2 - a_{n-1}) + \ldots + (b_n - a_1) \ldots + b_{n-1} + b_n) \geqslant nd$$

Итак, мы получили $nd \leqslant X \leqslant 2d$. Отсюда возможные значения $n$ – это 1 и 2. Остается привести примеры.

Случай $n = 1$ очевиден, $a_1 < b_1$.

Случай $n = 2$ выполняется при $a_1 = a_2 = 1,\ b_1 = b_2 = 2$.

*Ответ.* $n = 1$ и $n = 2$.

Второй способ.

Пусть $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n = A$, $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + b_n = B$. По условию,

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + b_n > a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

т.е. $B > A$.

Напишем $n$ неравенств.

$$\begin{cases} b_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n \geqslant a_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + b_n, \\ a_1 + b_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n \geqslant b_1 + a_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + b_n, \\ a_1 + a_2 + b_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n \geqslant b_1 + b_2 + a_3 + \ldots + b_{n-1} + b_n, \\ \ldots \\ a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + b_n \geqslant b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + a_n. \end{cases}$$

Сложим эти неравенства.

$$(n-1)A + B \geqslant (n-1)B + A$$

$$(n-2)(A-B) \geqslant 0$$

Так как $A - B < 0$, получаем $n - 2 \leqslant 0$. Примеры для случаев $n = 1$ и $n = 2$ приведены выше.

*Ответ.* $n = 1$ и $n = 2$.

*Продолжительность выполнения заданий – 235 минут.*
*Максимальное количество баллов за каждую задачу – 7 баллов. Итого 35 баллов за все задание.*