РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 11 КЛАССА.

11.1. Даны ненулевые числа a, b, c, d такие, что $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a}{d}+\frac{c}{b}$ и $\frac{c}{a}+\frac{d}{b}=\frac{c}{b}+\frac{d}{a}$. Верно ли, что тогда также $\frac{d}{c}+\frac{a}{b}=\frac{d}{b}+\frac{a}{c}$ и $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{a}{d}+\frac{b}{c}$?

Ответ. **Верно.**

Решение. Преобразуем первое равенство к виду

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a}{d}+\frac{c}{b}, \Rightarrow\ a\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{d}\right)=c\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{d}\right), \Rightarrow$$

$$(a-c)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{d}\right)=0, \Rightarrow\ \frac{(a-c)(d-b)}{bd}=0.$$

Отсюда следует, что либо $a=c$, либо $b=d$.

Преобразуем второе равенство к виду

$$\frac{c}{a}+\frac{d}{b}=\frac{c}{b}+\frac{d}{a}, \Rightarrow\ c\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=d\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right), \Rightarrow$$

$$(c-d)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=0, \Rightarrow\ \frac{(c-d)(b-a)}{ab}=0.$$

Отсюда следует, что либо $c=d$, либо $a=b$.

Поэтому получаем, что как минимум три из четырёх чисел a, b, c, d равны между собой.

Преобразуем искомые равенства к аналогичному виду, получим

$$\frac{d}{c}+\frac{a}{b}=\frac{d}{b}+\frac{a}{c}, \Rightarrow\ d\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)=a\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right), \Rightarrow$$

$$(d-a)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)=0, \Rightarrow\ \frac{(d-a)(b-c)}{cb}=0,$$

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{a}{d}+\frac{b}{c}, \Rightarrow\ a\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\right)=b\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\right), \Rightarrow$$

$$(a-b)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\right)=0, \Rightarrow\ \frac{(a-b)(d-c)}{cd}=0.$$

Таким образом, искомые равенства также верные.

11.2. Петя придумал три различных иррациональных числа и записал на доске все возможные попарные суммы этих чисел. Могло ли получиться так, что Петя записал только рациональные числа?

Ответ. **Не могло.**

Решение.

Пусть Петя придумал различные иррациональные числа a, b, c и для них записал три суммы, то есть три рациональных числа

$$a+b=p,\quad b+c=q,\quad c+a=r.$$

Но тогда и сумма

$$(a+b)+(a+c)=p+r=2a+(b+c)$$

тоже рациональное число, откуда получаем, что рационально и число

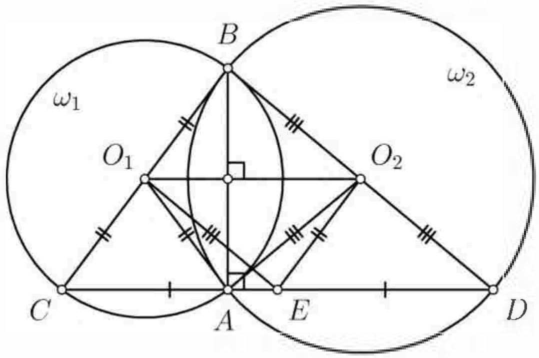
$$2a=(2a+(b+c))-(b+c)=p+r-q,$$

а значит, и число a – тоже рациональное. Это противоречит тому условию, что a –иррациональное число.

11.3. Две окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Через точку A провели прямую, параллельную O_1O_2. Эта прямая вторично пересекла окружности ω_1 и ω_2 в точках C и D. Пусть E – середина отрезка CD. Доказать, что $\angle O_1AO_2 = \angle O_1EO_2$.

Доказательство.

Проведем отрезок AB, тогда $AB \perp O_1O_2$ (так как четырёхугольник AO_1BO_2 – дельтоид) и так как $CD \parallel O_1O_2$, поэтому $AB \perp CD$. Тогда отрезки BC и BD – диаметры окружностей ω_1 и ω_2 соответственно, следовательно, O_1 и O_2 являются серединами отрезков BC и BD соответственно. Значит, O_1E и O_2E – средние линии треугольника ΔBCD, откуда следует, что $O_1E = \frac{1}{2}BD = O_2D = O_2A$ и $O_2E = \frac{1}{2}BC = O_1C = O_1A$. Поэтому треугольники ΔO_1AO_2 и ΔO_2EO_1 равны по третьему признаку равенства треугольников ($O_1E = O_2A$, $O_2E = O_1A$, O_1O_2 – общая), следовательно, $\angle O_1AO_2 = \angle O_1EO_2$, что и требовалось доказать.



11.4. В таблицу с 45 строками и 30 столбцами записали все *различные* числа от 1 до 2024, которые ***не делятся на*** 3. При этом оказалось, что в любом квадрате с размерами 2×2 и в любом прямоугольнике с размерами 2×3 сумма чисел *делится на* 3. Верно ли, что найдется квадрат с размерами 3×3, в котором сумма чисел тоже делится на 3?

Ответ. **Неверно.**

Решение. Среди натуральных чисел от 1 до 2025 ровно $\frac{2025}{3} = 675$ чисел, которые делятся на 3 (здесь число 2025 делится на 3), поэтому среди натуральных чисел от 1 до 2024 ровно $2025 - 675 = 1350 = 45 \cdot 30$ чисел, которые не делятся на 3. Это означает, что все такие числа ровно по одному разу могут быть записаны в таблице с 45 строками и 30 столбцами, и таблица будет заполнена полностью. При этом среди этих чисел половина имеет остаток от деления на 3, равный 1, а другая половина имеет остаток от деления на 3, равный 2. Тогда в таблице вместо самих чисел можно записать их остатки от деления на 3 – получится, что в таблице будут записаны 675 чисел 1 и 675 чисел 2, при этом условия задачи будут выполнены.

Так как в каждом прямоугольнике с размерами 2×3 сумма чисел делится на 3, а также в каждом квадрате с размерами 2×2 сумма чисел делится на 3, то и в каждом прямоугольнике с размерами 1×2 сумма чисел также делится на 3. Это означает, что в соседних по стороне клетках записаны числа, имеющие разные остатки от деления на 3, то есть числа 1 и 2. Но тогда числа, стоящие в клетках, соседних по вершине, но не соседних по стороне, будут записаны одинаковые остатки. Следовательно, таблицу можно раскрасить в два цвета в шахматном порядке так, что, например, в белых клетках записан остаток 1, а в черных клетках записан остаток 2.

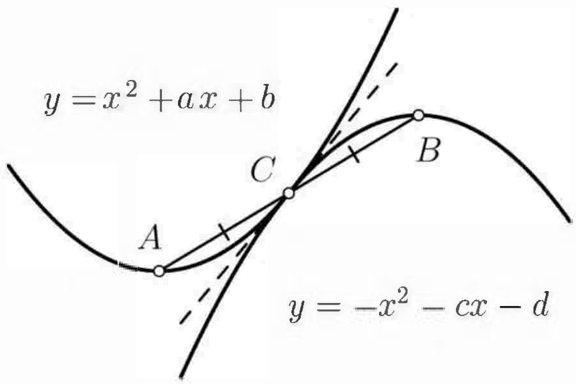
Таким образом, в любом квадрате с размерами 3×3 будет 5 клеток одного цвета и 4 клетки другого цвета, то есть либо будет записано 5 чисел 1 и 4 числа 2, либо наоборот будет записано 4 числа 1 и 5 чисел 2. В первом случае остаток от деления суммы чисел на 3 будет равен 1, во втором случае остаток от деления суммы чисел на 3 будет равен 2. Поэтому в обоих случаях сумма чисел в любом квадрате с размерами 3×3 не будет делиться на 3.

11.5. Две параболы, являющиеся графиками квадратных трёхчленов $y = x^2 + ax + b$ и $y = -x^2 - cx - d$, касаются в некоторой точке. Доказать, что точка касания есть середина отрезка с концами в вершинах этих парабол.

Решение.

Вершина A первой параболы с уравнением $y = x^2 + ax + b$ имеет координаты

$$x_1 = -\frac{a}{2},\ y_1 = \left(-\frac{a}{2}\right)^2 + a \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) + b = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + b = -\frac{a^2}{4} + b.$$



Вершина B второй параболы с уравнением $y = -x^2 - cx - d$ имеет координаты

$$x_2 = \frac{-c}{2\cdot(-1)} = -\frac{c}{2}, \quad y_2 = -\left(-\frac{c}{2}\right)^2 - c \cdot \left(-\frac{c}{2}\right) - d = -\frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{2} - d = \frac{c^2}{4} - d.$$

Тогда середина C отрезка AB имеет координаты

$$x^* = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-\frac{a}{2} - \frac{c}{2}}{2} = -\frac{a+c}{4},$$

$$y^* = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-\frac{a^2}{4} + b + \frac{c^2}{4} - d}{2} = \frac{b-d}{2} + \frac{c^2 - a^2}{8}.$$

По условию две параболы, являющиеся графиками квадратных трёхчленов $y = x^2 + ax + b$ и $y = -x^2 - cx - d$, касаются в некоторой точке M. Это означает, что квадратное уравнение

$$x^2 + ax + b = -x^2 - cx - d, \ \Rightarrow\ 2x^2 + (a+c)x + (b+d) = 0, \ \Rightarrow$$

$$x^2 + \frac{a+c}{2}x + \frac{b+d}{2} = 0$$

имеет только одно решение. Тогда дискриминант полученного квадратного трёхчлена $x^2 + \frac{a+c}{2}x + \frac{b+d}{2}$ равен нулю:

$$D = \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{b+d}{2} = 0, \ \Rightarrow\ \frac{(a+c)^2}{4} = 2(b+d) \Rightarrow$$

$$\frac{b+d}{2} = \frac{(a+c)^2}{16} = \left(\frac{a+c}{4}\right)^2.$$

Поэтому уравнение на абсциссу точки касания M имеет вид

$$x^2+2\frac{a+c}{4}\cdot x+\left(\frac{a+c}{4}\right)^2=0,\ \Rightarrow\ \left(x+\frac{a+c}{4}\right)^2=0,\ \Rightarrow\ x_0=-\frac{a+c}{4}=x^*.$$

Координата y_0 точки касания M равна

$$y_0=\left(-\frac{a+c}{4}\right)^2+a\cdot\left(-\frac{a+c}{4}\right)+b=\frac{a^2}{16}+\frac{ac}{8}+\frac{c^2}{16}-\frac{a^2}{4}-\frac{ac}{4}+b=$$

$$=-\frac{3a^2}{16}-\frac{ac}{8}+\frac{c^2}{16}+b=-\frac{a^2}{16}-\frac{ac}{8}-\frac{c^2}{16}+\frac{c^2}{8}-\frac{a^2}{8}+b=$$

$$=-\left(\frac{a+c}{4}\right)^2+\frac{c^2-a^2}{8}+b=\left\langle\text{так как }\left(\frac{a+c}{4}\right)^2=\frac{b+d}{2}\right\rangle=$$

$$=-\frac{b+d}{2}+\frac{c^2-a^2}{8}+b=\frac{c^2-a^2}{8}+\frac{b-d}{2}=y^*.$$

Поэтому точка касания M совпадает с серединой C отрезка AB с концами в вершинах A и B этих парабол.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕРКЕ И ОЦЕНКЕ.

11.1. а). Одно из равенств разложено в произведение – *по 1 баллу за каждое.*
б). Показано, что три из четырёх чисел равны между собой – *3 балла.*

11.2. Показано, что либо сумма сумм рациональна, либо разность сумм рациональна – *3 балла.*

11.3. а). Показано, что BC и BD – диаметры окружностей ω_1 и ω_2 – *2 балла.*
б). Показано, что O_1E и O_2E –средние линии треугольника ΔBCD – *2 балла.*
в). Показано, что $O_1E=O_2A$ и $O_2E=O_1A$ – ещё *3 балла.*
Любое *полностью верное* решение оценивается в 7 *баллов.*

11.4. а). Подсчитано число чисел с остатками 1 и 2 от деления на 3 – *1 балл.*
б). Показано, что в прямоугольнике с размерами 1×2 сумма чисел также делится на 3 – *2 балла.*
в). Показано, что во всей таблице числа с остатками 1 и 2 от деления на 3 расположены в шахматном порядке – *2 балла.*
г). Верное подсчитаны остатки в квадрате с размерами 3×3 –ещё *2 балла.*

11.5. а). Найдена середина C отрезка AB – *1 балла.*
б). Получено условие касания двух парабол – *2 балла.*
в). Найдена абсцисса x^* точки касания – *2 балла.*
г). Найдена ордината y^* точки касания – *2 балла.*