11 класс

11.1. При каком наименьшем n в некоторые клетки таблицы $n \times n$ можно вписать числа от 1 до 9 (каждое из этих девяти чисел ровно один раз) так, чтобы сумма чисел в любой строке и сумма чисел в любом столбце были бы меньше 11?

Ответ. 5.

Решение. Каждое из чисел от 5 до 9 должно находиться в отдельной строке, так как сумма даже двух любых из этих чисел не меньше 11. Значит, $n \geq 5$. Для n=5 можно построить пример такой таблицы.

9	1			
	8	2		
		7	3	
			6	4
				5

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Доказано, что $n \geq 5$ – 4 балла.
Приведен пример таблицы для n=5 – 3 балла.

11.2. Найдите значение суммы

$$S = (1^2 + 1\cdot 4 + 4^2) + (4^2 + 4\cdot 7 + 7^2) + (7^2 + 7\cdot 10 + 10^2) + \ldots \quad \ldots + (94^2 + 94\cdot 97 + 97^2) + (97^2 + 97\cdot 100 + 100^2)$$

Ответ. $\frac{100^3 - 1^3}{3} = 333333$.

Решение. Заметим, что $a^2 + ab + b^2 = \frac{b^3 - a^3}{b - a}$. Тогда

$$S = \frac{4^3 - 1^3}{4 - 1} + \frac{7^3 - 4^3}{7 - 4} + \ldots + \frac{100^3 - 97^3}{100 - 97} = \frac{100^3 - 1^3}{3} = 333333.$$

Комментарий. Ответ записан в виде $\frac{100^3 - 1^3}{3}$ – баллы не снимаются.

11.3. Есть 100 карточек, на которых написаны натуральные числа от 1 до 100 (каждое – по одному разу). Можно ли их разбить на 25 наборов по 4 карточки так, чтобы в каждом из наборов число на одной из карточек было бы либо в 2 раза, либо в 5 раз меньше, чем сумма чисел трех оставшихся карточек набора?

Ответ. Нельзя.

Решение. Предположим, что разбиение возможно. Тогда заметим, что в каждом из наборов сумма чисел на всех 4 карточках делится на 3. Но тогда и сумма всех 100 чисел должна делиться на 3. Но сумма чисел от 1 до 100 равна 5050 и на 3 не делится. Противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

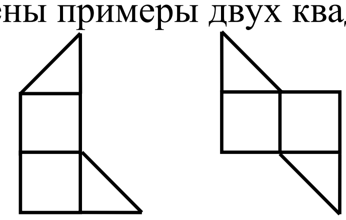
11.4. Дан шестиугольник, описанный около окружности. Назовём его сторону a *хорошей*, если треугольник, сложенный из неё и двух её соседних сторон, является прямоугольным с гипотенузой a. Может ли этот шестиугольник иметь хотя бы три хорошие стороны?

Ответ. Не может.

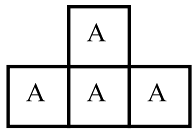
Решение. Пусть шестиугольник имеет хотя бы три хорошие стороны. Обозначим последовательно стороны шестиугольника $x_1, x_2, \ldots, x_6$. Так как он описанный, то $x_1 + x_3 + x_5 = x_2 + x_4 + x_6$. Можем считать, что x_1 – одна из хороших сторон. Если сторона x_k хорошая, то $x_k > x_{k-1}$ и $x_k > x_{k+1}$ (считаем $x_i = x_{i+6}$), поскольку гипотенуза больше катетов. Таким образом, хорошие стороны не могут быть соседними, откуда следует, что три хорошие стороны могут быть, только если это x_1, x_3, x_5. Но тогда $x_1 > x_2$, $x_3 > x_4$, $x_5 > x_6$, значит, $x_1 + x_3 + x_5 > x_2 + x_4 + x_6$, получаем противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Замечено, что хорошая сторона больше своих соседей – 1 балл.
Используется без доказательства утверждение о том, что в описанном шестиугольнике суммы сторон через одну равны – баллы не снимаются.
Доказано, что в описанном шестиугольнике суммы сторон через одну равны – баллы не добавляются.

11.5. Назовем *квадроугольником* фигуру, которая состоит из двуклеточного прямоугольника и двух примыкающих к нему треугольников, каждый из которых является половиной клетки (по одному треугольнику к каждой из двух клеток прямоугольника). Ниже приведены примеры двух квадроугольников.



Можно ли разрезать клетчатую фигуру, состоящую из 4 клетчатых квадратов A размера 9×9, составленных в виде фигуры т-тетрамино (см. рисунок) на квадроугольники?



Ответ. Нельзя.

Решение. Рассмотрим шахматную раскраску клеток заданной фигуры (пусть для определенности угловые клетки чёрные). Заметим, что каждый квадроугольник содержит ровно 1,5 белых и ровно 1,5 чёрных клетки. Если бы фигуру можно было бы разрезать на квадроугольники, то в ней было бы одинаковое количество чёрных и белых клеток. Однако в трёх квадратах 9×9 будет 41 чёрная и 40 белых клеток, а в одном – 40 чёрных и 41 белая, то есть всего в фигуре будет 163 чёрных и 161 белая клетки. Значит, разрезать данную фигуру на квадроугольники невозможно.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.