

11 класс

11.1. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin\left(\frac{\pi}{2}(2x^2+1)\right) + \cos(3\pi x^2) = 0$.

Ответ: $\frac{1}{2}$. **Решение.** Записав первое слагаемое как $\cos \pi x^2$ и преобразовав сумму косинусов в произведение, получим (после сокращения на $\pi/2$) две серии корней: $4x^2 = 2m+1$ и $2x^2 = 2n+1$ (m, n – целые). Очевидно, наименьшие положительные корни каждой серии получаются при $m = n = 0$ и в первой серии это будет меньший корень $x = \frac{1}{2}$.

11.2. Решите уравнение $x^4 + 4 + 2x(x^2 - 2x + 2) = 0$.

Ответ: $-2 \pm \sqrt{2}$. **Решение.** Разложим левую часть уравнения на множители, дополнив до полного квадрата:

$$x^4 + 4 + 2x(x^2 - 2x + 2) = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 + 2x(x^2 - 2x + 2) = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 + 2x(x^2 - 2x + 2) = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) + 2x(x^2 - 2x + 2) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 4x + 2)$$
 Тогда получим $(x^2 + 4x + 2)(x^2 - 2x + 2) = 0$. Корнями первого множителя являются $-2 \pm \sqrt{2}$, а второй множитель имеет отрицательный дискриминант. *Комментарий:* разложить левую часть уравнения на множители можно было также, если разделить уголок $(x^4 + 4)$ на $(x^2 - 2x + 2)$.

11.3. Дан треугольник ABC . Обозначим через r_A радиус окружности, проходящей через A и касающейся стороны BC в её середине. r_B и r_C определяются аналогично (как радиусы окружностей, проходящих через вершину и касающихся противоположной стороны в её середине). Можно ли утверждать, что треугольник ABC равносторонний, если известно, что $\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C} = \frac{2}{r}$, где r – радиус вписанной окружности треугольника ABC ?

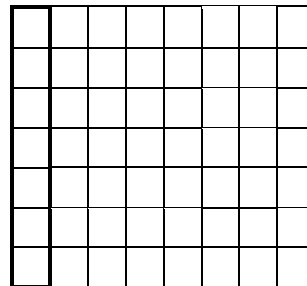
Ответ: Можно. **Решение.** Рассмотрим окружность, которая проходит через A и касается BC в точке D – середине BC . Диаметр этой окружности не меньше, чем хорда AD , а хорда AD не меньше, чем высота h_A треугольника, проведенная из вершины A . Таким образом, $h_A \leq 2r_A$, причем данное нестрогое неравенство превращается в равенство лишь в случае, когда высота проходит через центр окружности и является медианой. Заметим, что в любом треугольнике имеет место равенство $\frac{1}{h_A} + \frac{1}{h_B} + \frac{1}{h_C} = \frac{1}{r}$, которое равносильно равенству $\frac{2S}{h_A} + \frac{2S}{h_B} + \frac{2S}{h_C} = \frac{2S}{r} \Leftrightarrow a + b + c = P$ (где P – периметр.). Итак, если выполняется соотношение из условия задачи, то все высоты треугольника являются медианами и значит, треугольник равносторонний.

11.4. Существуют ли такие иррациональные числа x, y , что оба числа $(x^3 - 3x^2y + xy^2 + 1)$ и $(x^2 - 3xy + y^2)$ рациональные?

Ответ: существуют. **Решение.** Поскольку $x^3 - 3x^2y + xy^2 + 1 = x(x^2 - 3xy + y^2) + 1$, то если мы найдем иррациональные числа x, y , для которых выражение в скобке $(x^2 - 3xy + y^2)$ равно нулю, то оба числа $(x^3 - 3x^2y + xy^2 + 1)$ и $(x^2 - 3xy + y^2)$ будут рациональными. Решая уравнение $x^2 - 3xy + y^2 = 0$ как квадратное относительно x , получаем $x = \frac{3y \pm y\sqrt{5}}{2}$. Тогда для иррациональных чисел $y = 2\sqrt{5}$, $x = 3\sqrt{5} + 5$ будут выполняться равенства $x^3 - 3x^2y + xy^2 + 1 = 1$ и $x^2 - 3xy + y^2 = 0$.

11.5. В некоторые клетки шахматной доски 8×8 поставлены шашки. Для каждой из 64 клеток подсчитали число шашек в 15 клетках, находящихся с этой клеткой в той же строке или том же столбце. Могло ли оказаться так, что все эти 64 числа четные?

Ответ. Не могло.



Решение. Для данной клетки A будем называть A -крестовиной все 15 клеток в той же строке или столбце, что и A (считая и саму клетку A). Неполной A -строкой будем называть 7 клеток в той же строке, что и A , но без самой клетки A . Аналогично определяется неполный A -столбец. Докажем, что не может на всех 64 крестовинах число шашек оказаться четным. Действительно, предположим противное и рассмотрим произвольные A - и B -крестовины с клетками A и B из одного столбца. Тогда при вычитании числа шашек на этих крестовинах получим, что в неполных A - и B -строках число шашек одинаковой четности. Аналогично, для двух клеток A и B из одной строки число шашек в неполных A - и B -столбцах одинаковой четности. Теперь рассмотрим какую-нибудь шашку на доске, пусть она находится в клетке A . Без ограничения общности можно считать, что A – угловая клетка (левая нижняя; этого можно добиться, переставив целиком на первое место строку и затем столбец, где находится A , при этом свойство четности для крестовин не меняется). По предположению, число шашек в A -крестовине четно, а значит, без самой шашки из клетки A число шашек на единицу меньше, и поэтому нечетно. Пусть для определенности число шашек в неполной A -строке (т.е. в первой строке), нечетно, а в неполном A -столбце (т.е. в первом столбце) четно. «Отрежем» от нашей доски каёмку из 15 клеток первой строки и первого столбца (см. рис.) и тогда на полученной доске 7×7 в каждой строке будет нечетное число шашек, а в каждом столбце – четное. Но это противоречит тому, что если подсчитать все шашки на этой доске 7×7 по строкам, то получится нечетная сумма (сумма семи нечетных чисел), а если по столбцам – то четная (сумма семи четных чисел). Противоречие доказывает наше утверждение.

