

**Решения заданий Муниципального Этапа
Всероссийской олимпиады школьников по математике 2024-25 г.г.
11 класс**

Все задачи оцениваются из 7 баллов. Каждое верное решение, вне зависимости от длины и степени красоты, оценивается в 7 баллов

11.1. Найдите все значения параметра α такие, что из выполнимости неравенства $x + y > \alpha$ следует выполнимость неравенства $\frac{y}{x} + 1 > \alpha - x$ при всех положительных x .

Ответ. $0 \leq \alpha \leq 4$.

Решение. Если из выполнимости неравенства $x + y > \alpha \Leftrightarrow y > \alpha - x$ при всех положительных x следует выполнимость неравенства $\frac{y}{x} + 1 > \alpha - x \Leftrightarrow y > (\alpha - 1)x - x^2$, то при каждом положительном значении x луч $(\alpha - x, +\infty)$ содержится в луче $((\alpha - 1)x - x^2, +\infty)$. Это значит, что неравенство $\alpha - x \geq (\alpha - 1)x - x^2$, равносильное $x^2 - \alpha x + \alpha \geq 0$, выполняется при всех $x > 0$. Если бы значение параметра α было отрицательным, то при маленьких x левая часть неравенства тоже была бы отрицательна, поэтому $\alpha \geq 0$. В частности, отсюда следует, что минимальное значение квадратного многочлена $x^2 - \alpha x + \alpha$ достигается при $x = \frac{\alpha}{2} \geq 0$. Следовательно, неравенство $x^2 - \alpha x + \alpha \geq 0$ при всех $x > 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha - \frac{\alpha^2}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \in [0, 4]$.

Критерии проверки. (●) Без обоснования рассматривается сразу только случай $\alpha \geq 0$: снимаем 2 балла. (●) Упущено одно из крайних значений $\alpha = 0$; 2: минус 2 балла. Если упущены оба крайних значения: минус 3 балла.

11.2. На столе лежат 13 карточек, пронумерованных натуральными числами от 1 до 13. Вася и Петя по очереди берут со стола по одной карточке, первым берёт Вася, он же забирает последнюю карточку. Его цель – добиться того, чтобы сумма чисел на взятых им семи карточках была простым числом. Сможет ли Петя ему в этом помешать?

Ответ. Да.

Решение. Среди всех натуральных чисел от 1 до 13 семь нечётных и 6 чётных. Петя должен каждый раз брать карточку с числом той же чётности, что на карточке, взятой перед ним Васей. Он не сможет сделать так только, если все карточки с нечётными числами уже взяты (Вася своим крайним ходом забрал последнюю), тогда, если чётные ещё остались, Петя может взять любую из них. Если их тоже не осталось, игра заканчивается. В любом случае, в итоге Васе достанутся ровно 4 карточки с нечётными номерами: согласно стратегии Пети, разница между числом нечётных карточек у него и у Васи не больше одного, если бы Вася набрал их не меньше 5, то Петя – не меньше 4, всего не меньше 9, а их 7 – противоречие. Если же Вася взял бы не больше 3 нечётных карточек, то и Петя – не больше 3, всего 6, что меньше 7 – снова противоречие.

Таким образом, у Васи в итоге окажутся ровно 4 нечётных карточки, значит его сумма будет чётным числом, большим двух, то есть составным числом. Петя смог помешать затее Васи.

Критерии проверки. (●) Предложена верная стратегия для Пети: 3 балла. (●) Чёткое и явное обоснование того, что при этом Васе достанутся ровно 4 нечётных карточки: 3 балла. (●) Показано, что сумма номеров карточек Васи не может быть простой: 1 балл.

11.3. В остроугольном треугольнике ABC величина угла BAC равна 60 градусов и сторона AB больше стороны AC. Обозначим за I и H центр вписанной окружности и точку пересечения высот треугольника ABC соответственно. Доказать, что $2 \cdot \angle ANI = 3 \cdot \angle ABC$.

Доказательство. Сначала заметим, что точка I лежит внутри треугольника ANB. Из того, что сторона AB больше стороны AC следует, что величина угла ACB больше величины угла ABC. Сумма этих углов равна 120 градусов, поэтому, в частности, угол ACB больше 60 градусов, а угол ABC меньше 60 градусов. Тогда угол ABH, равный $90 - \angle BAC = 30$ градусам, больше угла ABI, равного половине $\angle ABC < 60$. С другой стороны, угол BAI, равный 30 градусам, меньше угла BAH $= 90 - \angle ABC > 90 - 60 = 30$.

Выразим величину угла ANI через величины углов треугольника ABC, как разность между углом $\angle ANB = 180 - (90 - \angle ABC) - (90 - \angle BAC) = \angle ABC + \angle BAC = 180 - \angle ACB$ и углом $\angle BNI$.

Сначала заметим, что четырёхугольник BINС вписанный, так как $\angle BNC = 180 - (90 - \angle ACB) - (90 - \angle ABC) = \angle ABC + \angle ACB = 180 - \angle BAC = 120$ градусов, и $\angle BIC = 180 - \frac{1}{2} \angle ACB - \frac{1}{2} \angle ABC = 180 - \frac{1}{2} (180 - 60) = 120 = \angle BNC$. Тогда величина угла BNI равна величине угла BCI, как вписанного, опирающегося на хорду BI, то есть равна $\frac{1}{2} \angle ACB$. Следовательно, величина угла ANI равна $180 - \angle ACB - \frac{1}{2} \angle ACB = 180 - \frac{3}{2} \angle ACB = 180 - \frac{3}{2} (120 - \angle ABC) = \frac{3}{2} \angle ABC$, что и требовалось доказать.

Критерии проверки. (●) Доказано, что точка I лежит внутри треугольника ANB: 2 балла. (●) Доказано, что четырёхугольник BINС вписанный: 2 балла. (●) Угол ANI представлен, как разность между $\angle ANB$ и углом $\angle BNI$: 1 балл. (●) Доказано, что величина угла BNI равна $\frac{1}{2} \angle ACB$: 2 балла.

11.4. Найти все решения в целых числах уравнения: $1 + x^2y = x^2 + 2xy + 2x + y$.

Ответ. (0,1), (-1, -1), (3,7), (1, -1), (2,-7).

Решение. Запишем уравнение в виде: $(x^2 - 1)(y - 1) = 2x(y + 1)$, разложим левую часть на множители: $(x - 1)(x + 1)(y - 1) = 2x(y + 1)$.

Если $x = 0$, то $y = 1$ – решение уравнения. Далее считаем $x \neq 0$. Число x , делящее правую часть, должно делить и левую часть, следовательно, ввиду взаимной простоты чисел $x - 1, x$ и $x + 1, x$, либо $x = \pm 1$, либо x делит $y - 1$.

Если $x = \pm 1$, получаем соответственно $y = -1$ и $y = -1$ в обоих случаях, два решения. Далее $x \neq 0, \pm 1$, и x делит $y - 1$.

Запишем $y = kx + 1$ для некоторого целого k . Подставим это выражение в уравнение, получим $(x - 1)(x + 1)k = 2(kx + 2)$. Из последнего равенства следует, что k является целым делителем числа 4, то есть равно одному из чисел $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Преобразуем уравнение к виду $x^2 - 2x - 1 - \frac{4}{k} = 0$ и аккуратно переберём все случаи.

1) $k = 1$. Тогда $x^2 - 2x - 5 = 0$, $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{6}$ – целых решений нет.

2) $k = -1$. Тогда $x^2 - 2x + 3 = 0$ – решений нет.

3) $k = 2$. Тогда $x^2 - 2x - 3 = 0$, $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{4} = -1; 3$ – два решения: $(-1, -1), (3, 7)$.

4) $k = -2$. Тогда $x^2 - 2x + 1 = 0$, $x = 1$ – решение: $(1, -1)$.

5) $k = 4$. Тогда $x^2 - 2x - 2 = 0$, $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$ – целых решений нет.

6) $k = -4$. Тогда $x^2 - 2x = 0$, $x_{1,2} = 0; 2$ – два решения: $(0, 1), (2, -7)$.

Критерии проверки. (●) Угаданы не меньше, чем 3 верных ответа: 1 балл.

(●) Получено соотношение $y = kx + 1$: 3 балла. (●) Доказано, что k равно одному из чисел $\pm 1, \pm 2, \pm 4$: 2 балла. (●) Верно разобраны все случаи, получены правильные ответы: 2 балла. (●) Если при этом часть ответов упущены: снимаем 1 балл.

11.5. Даны натуральные числа $m \geq n \geq 1$. Найти такое минимальное число N , зависящее от m и n , что среди любых N человек обязательно найдутся либо m пар различных знакомых человек (все $2m$ человек в парах различны), либо n пар различных незнакомых человек (все $2n$ человек в парах различны).

Ответ. $N = 2m + n - 1$.

Доказательство. Докажем, что при количестве людей $N \leq 2m + n - 2$ требование условия может не выполняться. Так будет в компании, где $2m - 1$ человек знакомы каждый друг с другом, а остальные $n - 1$ вообще ни с кем не знакомы. Тогда все знающие кого-либо содержатся среди первых $2m - 1$ людей и не могут образовывать m пар различных знакомых человек. А каждая из n пар различных незнакомых человек должна содержать не меньше, чем по одному человеку среди вторых $n - 1$ различных попарно незнакомых человек, что невозможно. Ясно, что условие задачи не выполнится и для любой компании, получающейся из данной удалением любых её членов.

Докажем по индукции, что в любой компании из $N \geq 2m + n - 1$ человек требуемое в условии возможно. Шаг индукции будем делать от пары $(m - 1, n - 1)$ к паре (m, n) , в качестве базы индукции докажем утверждение задачи для всех пар вида $(m, 1)$, $m \geq 1$.

База индукции. Докажем, что в любой компании из не менее, чем $2m$ человек, либо найдутся m пар различных знакомых людей, либо найдутся два незнакомых человека. Для этого разобьём компанию произвольным образом на m пар различных людей. Если в каждой такой паре люди знакомы,

выполнится первое условие, а если хотя бы в одной такой паре люди незнакомы, выполнится второе условие.

Шаг индукции. Рассмотрим произвольную компанию из не менее, чем $2m + n - 1, m \geq n \geq 2$ человек. Докажем, что возможны три случая: (1) в компании все знают всех, (2) в компании никто не знает никого, (3) в компании найдётся человек А, который знает некоего члена компании Б, но не знает некоего члена компании В. В первых двух случаях шаг индукции не нужен, в первом случае можно взять любые n пар, во втором – любые m пар

. Далее докажем, что в случае, когда не выполнены случаи (1) и (2), выполнен случай (3). Если бы случай (3) был не выполнен, то каждый член компании либо знал в ней всех, либо не знал никого. Одновременно в компании не могут быть два члена, один из которых знает всех, а другой – никого, так как они были бы одновременно знакомы и незнакомы, что в жизни бывает, но в математике невозможно. Следовательно, тогда должны иметь место либо случай (1), либо случай (2), противоречие. Итак, далее в компании найдётся человек А, который знает некоего члена компании Б, но не знает некоего члена компании В.

Удалим всех троих А, Б и В из компании, после чего в ней останется $2m + n - 1 - 3 = 2(m - 1) + (n - 1) - 1$ человек. По предположению индукции, в ней либо найдутся $m - 1$ пар различных знакомых человек, либо $n - 1$ пар различных незнакомых человек. В первом случае добавим к $m - 1$ паре различных знакомых человек пару знакомых А и Б, получим m пар знакомых, во втором случае к $n - 1$ пар различных незнакомых человек пару незнакомых А и В, получим n пар различных незнакомых. Следовательно, условие задачи выполнено для любой компании из не менее, чем $2m + n - 1$ человек. По индукции, утверждение доказано.

Критерии проверки. (●) Приведён правильный ответ $N = 2m + n - 1$, полученный рассмотрением примеров для малых m, n : 1 балл. (●) Доказано, что при любом количестве людей $N \leq 2m + n - 2$ требование условия может не выполняться: 2 балла. (●) Доказано, что в любой компании из $N \geq 2m + n - 1$ человек требуемое в условии возможно: 5 баллов. (●) Из них стоимость доказательства утверждения, что в компании найдётся человек А, который знает некоего члена компании Б, но не знает некоего члена компании В: 2 балла.