ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 2024/2025 гг.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

ПРЕДМЕТ
11 КЛАСС

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ЧЛЕНОВ ЖЮРИ (КЛЮЧИ, КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ)

Максимальное количество баллов – 42 балла

1. Найдите какое-нибудь число А такое, что 2А является точным квадратом, а 3А – точным кубом натурального числа.

   Решение: Например, $2^3 \cdot 3^2 = 72.$ 2А – это квадрат числа 12, 3А – куб числа 6.
   Критерии проверки: Любой верный пример числа с проверкой – **7 баллов**, в остальных случаях – **0 баллов**.

2. Вася обычно идет до школы одной и той же дорогой с постоянной скоростью *v*. Однажды он увеличил скорость на 10% и пришел на 2 минуты раньше обычного. На сколько раньше он бы пришел, если бы увеличил скорость на 20%?

   Ответ: на 3 мин 40 с.
   Решение: Пусть обычно Васин путь занимал *t* минут. Значит, увеличив скорость, он прошел тот же путь за *t* – 2 минуты. То есть имеем уравнение $1{,}1v \cdot (t-2) = vt.$ После очевидных преобразований находим *t* = 22 мин. Допустим при увеличении скорости на 20% он уменьшил бы время на *x* минут, тогда можно было бы написать аналогичное равенство: $1{,}2v \cdot (t-x) = vt \Rightarrow 1{,}2(22-x) = 22 \Rightarrow x = 11/3$ минуты или 3 мин 40 сек.

   Критерии проверки: Верное решение – **7 баллов**, ход решения верный, но получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки – **6 баллов**, верно построена математическая модель (система уравнений) – **2 балла**, найдено, что обычно он проходит путь за 22 мин – **2 балла**, решение неверно или только ответ – **0 баллов**. (подчеркнутые баллы могут суммироваться)

3. В трапеции *ABCD* на большем основании *AD* отмечена точка *K* такая, что *AB*=*BK* и *CK*=*CD*. Площади треугольников *ABK* и *CDK* равны соответственно 30 и 6. Чему равна площадь треугольника *BCK*?

   Ответ: 18.
   Решение: Заметим, что площади треугольников ABK и CDK относятся как 5:1, значит отрезок AK в 5 раз больше отрезка KD (высоты у треугольников равны высоте трапеции). Пусть AK=5x, KD=x. Проведем высоты BM и CN, так как треугольники ABK и CDK равнобедренные, то M и N – середины AK и KD. Следовательно, MN=3x=BC. Тогда площадь треугольника BCK в 3 раза больше, чем площадь CDK (высоты одинаковые, а основания относятся 3:1) и равна 18.

   Критерии проверки: Верное решение – **7 баллов**, показано, что *BC* в 2 раза меньше *AD* – **2 балла**, решение неверно – **0 баллов**.

4. Пусть $f(x)=x^2-2x$. Найдите все x, при которых верно неравенство $f(f(f(x)))\le 3$.

Ответ: $-1\le x\le 3$.

Решение: Рассмотрим неравенство $f(t)\le 3 \Leftrightarrow t^2-2t-3\le 0$. Оно имеет решение $-1\le t\le 3$. Тогда получаем неравенство $-1\le f(f(x))\le 3$. Легко заметить, что неравенство $f(t)\ge -1$ выполняется при всех t, следовательно исходное неравенство равносильно неравенству $f(x)\le 3 \Leftrightarrow -1\le x\le 3$.

Критерии проверки: Верное решение – **7 баллов**, получено неравенство $-1\le f(f(x))\le 3$ – **3 балла**, решение неверно – **0 баллов**.

5. Сколькими способами число 2024 можно представить в виде суммы нескольких последовательных натуральных чисел?

Ответ: 3 способа.

Решение: Обозначим через n количество чисел, $n>1$. Запишем их сумму в виде: $(k+1)+(k+2)+...+(k+n)=2024$. Фактически требуется выяснить, какие значения могут принимать n и k.

Преобразуем равенство:

$$nk+\frac{n(n+1)}{2}=2024 \Leftrightarrow 2nk+n(n+1)=2\cdot 2024 \Leftrightarrow n(2k+n+1)=2^4\cdot 11\cdot 23.$$

Заметим, что левая часть равенства – произведение двух натуральных чисел разной четности, причем <u>n - меньший множитель</u>. Значит, если n – четное число, то это может быть только 16. Следовательно, получаем равенство $16(2k+17)=16\cdot 11\cdot 23 \Rightarrow 2k=236 \Rightarrow 118$.

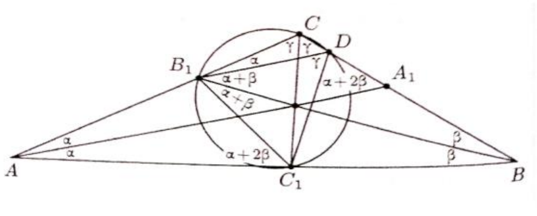
Если же n – нечетное число, то могут быть только два варианта его значений: 11 и 23. Эти варианты дают соответственно значения k, равные 178 и 76. Итого возможны три варианта.

Критерии проверки: Верное решение – **7 баллов**, получено уравнение и решение верно сведено к перебору нескольких вариантов, все случаи рассмотрены, но имеются ошибки – **не более 5 баллов**, составлено уравнение, но верно разобраны не все случаи (часть случаев пропущена) – **3 балла,** только составлено уравнение – **2 балла**, решение неверно или только ответ – **0 баллов**. (Во всех промежуточных критериях под *уравнением* подразумевается равенство вида $n(2k+n+1)=2^4\cdot 11\cdot 2$)

6. В треугольнике ABC проведены биссектрисы углов AA_1, BB_1, CC_1 (точки A_1, B_1 и C_1 – на сторонах треугольника). Известно, что $\angle AA_1C=\angle AC_1B_1$. Найдите $\angle ACB$.

Ответ: 120°.

Решение: Пусть в треугольнике ABC углы A, B и C равны соответственно $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$, то есть $\alpha+\beta+\gamma=90°$. Проведем B_1D



параллельно биссектрисе AA_1, точка D на стороне ВС, $\angle CB_1D=\alpha$.

Вычислим некоторые углы:

$\angle AA_1C=\angle AC_1B_1=\angle B_1DC=\alpha+2\beta$ (внешний угол ΔAA_1B), $\angle BB_1C_1=\angle AC_1B_1-\angle C_1BB_1=\alpha+\beta$, $\angle BB_1C=2\alpha+\beta$ (внешний угол ΔAB_1B), $\angle DB_1B=\alpha+\beta$. Таким образом, треугольники $\Delta B_1BC_1=\Delta B_1DB$, значит треугольник B_1DC_1 равнобедренный и $\angle B_1DC_1=\frac{1}{2}(180°-2(\alpha+\beta))=90°-(\alpha+\beta)=\gamma$.

Тогда точки B_1, C, D, C_1 лежат на одной окружности. А так как вписанные углы $\angle DCC_1=\angle B_1CC_1=\angle BDC_1=\gamma$, то треугольник B_1DC_1 равносторонний. Следовательно, $\angle ACB=2\gamma=120°$.

Критерии проверки: Верное решение – **7 баллов**, решение неверно – **0 баллов**.