Второй (муниципальный) тур всероссийской олимпиады школьников по математике в 2024-2025 учебном году

11 класс

1. Докажите, что уравнение $x^2 + 2^{2024}x + 2^{2025} = 0$ не имеет целых корней.

Решение.

(Первое решение). Дискриминант этого уравнения равен:
$2^{4048} - 4 \cdot 2^{2025} = 2^{4048} - 2^2 \cdot 2^{2025} = 2^{4048} - 2^{2027} = 2^{2027}(2^{2021} - 1)$.
Для наличия целого корня необходимо, чтобы дискриминант был точным квадратом. Однако, число $2^{2027}(2^{2021} - 1)$ не является точным квадратом, так как степень вхождения двойки в любой точный квадрат чётна.

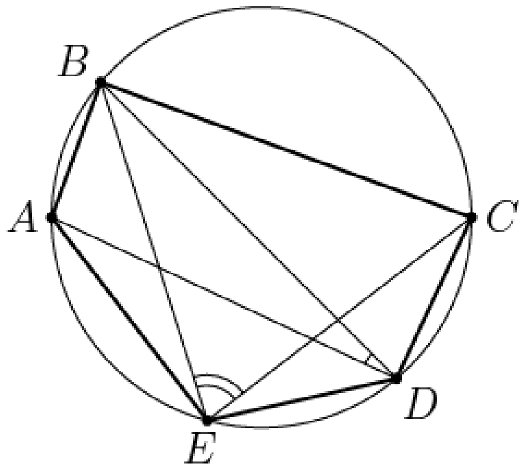
Второе решение. Заметим, что при $x = -2$ левая часть уравнения положительна (равна 4), а при $x = -3$ отрицательна (равна $-2^{2024} + 9$). Значит, на промежутке (-3; -2) у уравнения есть корень; он, очевидно, нецелый. Так как по теореме Виета сумма корней нашего уравнения равна -2^{2024}, второй корень тоже нецелый.

2. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность ω. Диагональ AC является диаметром окружности ω. Найдите $\angle BEC$, если $\angle ADB = 20°$.

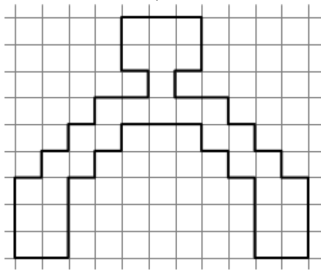
Ответ: $70°$.

Решение.

Так как $\angle ADB = 20°$, дуга AB равна $40°$. Так как AC – диаметр, дуга ABC равна $180°$, то есть дуга BC равна $180° - 40° = 140°$. $\angle BEC$ опирается на дугу BC, а значит, он равен $\frac{140°}{2} = 70°$.

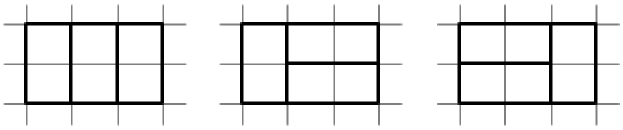


3. Сколькими способами можно разрезать по клеткам приведённую ниже картинку на прямоугольники 1×2 (сторона одной клетки равна 1)?

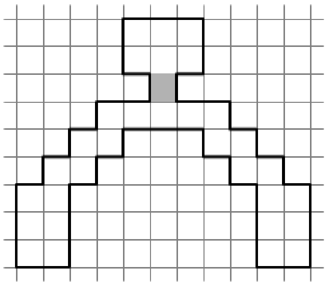


Ответ: 27.

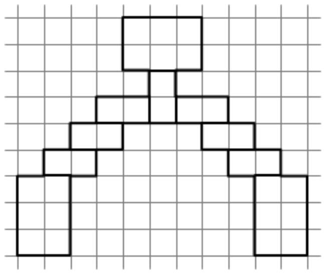
Решение. Прямым перебором можно убедиться, что количество разрезаний прямоугольника 2×3 на прямоугольники 1×2 равно трём (все три варианта при-ведены на рисунке ниже).



Рассмотрим клетку A:



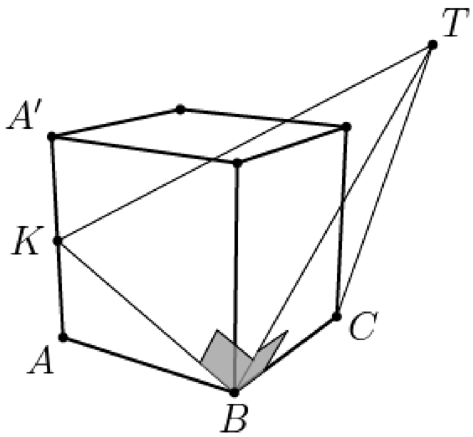
Если A является нижней клеткой вертикального прямоугольника 1×2, то остающаяся верхняя часть фигуры имеет нечётную площадь и не может быть разрезана. Значит, A является верхней клеткой вертикального прямоугольника 1×2. Тогда следующее частичное разрезание получается однозначно:



Осталось разрезать три отдельных прямоугольника 2×3. Для каждого из них есть три разрезания, значит, для всех вместе есть $3^3 = 27$ разрезаний.

4. На ребре AA' куба $ABCDA'B'C'D'$ с ребром длины 2 отмечена точка K. В пространстве отмечена такая точка T, что $TB = \sqrt{11}$ и $TC = \sqrt{15}$. Найдите длину высоты тетраэдра $TBCK$, опущенной из вершины C.

Ответ: 2.



Решение.

Заметим, что

$$TB^2 + BC^2 = 11 + 4 = 15 = TC^2.$$

Отсюда по обратной теореме Пифагора следует, что угол TBC прямой. Следовательно, TB перпендикулярна BC, то есть T лежит в плоскости грани $AA'B'B$. Значит, BC является высотой, опущенной из вершины C, а её длина равна 2.

Замечание. Существуют два возможных расположения точки N, симметричных относительно плоскости (KBC).

5. Внутри шляпы волшебника живут 100 кроликов: белые, синие и зелёные. Известно, что если произвольным образом вытащить из шляпы 81 кролика, то среди них обязательно найдутся три разноцветных. Какое наименьшее количество кроликов нужно достать из шляпы, чтобы среди них точно было два разноцветных?

Ответ: 61.

Решение. Докажем, что если произвольным образом вытащить из шляпы 61 кролика, то среди них найдутся два разноцветных. Предположим противное: пусть имеется $a \geq 61$ кроликов какого-то цвета (например, белого). Пусть второй цвет по количеству кроликов – синий. Тогда в шляпе живёт хотя бы $\frac{100-a}{2}$ синих кроликов. А значит, общее количество белых и синих хотя бы

$$a + \frac{100-a}{2} = \frac{100+a}{2} \geq \frac{161}{2} = 80{,}5.$$

Так как кроликов целое число, белых и синих вместе хотя бы 81, что противоречит условию.

Покажем, что 60 кроликов может быть недостаточно. Пусть в шляпе живёт 60 белых и по 20 синих и зеленых. Тогда может получиться, что все вытащенные кролики белые. С другой стороны, если вытащить 81 кролика, то среди них точно встретятся кролики всех трёх цветов.