

Пермский край
2024-2025 учебный год
ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
11 КЛАСС

Время выполнения заданий — 235 минут (3 часа 55 минут).

Максимальная оценка за выполнение всех олимпиадных заданий — 35 баллов (по 7 баллов за каждую задачу).

- 11.1. Будем говорить, что книги расставлены на n полках *красиво*, если количества книг на полках образуют n последовательных натуральных чисел. Вася утверждает, что однажды ему удалось красиво расставить все его книги на 5 полок, затем на 4 полки, после этого на 3 полки и, наконец, на 2 полки. Может ли Вася говорить правду?

Ответ. Нет.

Решение. Посмотрим на набор книг, который можно красиво расставить на 2 полки. Если на полке с меньшим числом книг стоит k книг, то на второй стоит $k + 1$ книга, значит, всего книг $k + k + 1 = 2k + 1$, то есть нечётное количество. Теперь посмотрим на набор книг, который можно красиво расставить на 4 полки. Если на полке с наименьшим числом книг стоит m книг, то количества книг на полках равны $m, m + 1, m + 2, m + 3$, значит, всего книг $m + m + 1 + m + 2 + m + 3 = 4m + 6$ — чётное количество. Так как одно и то же количество книг не может быть одновременно чётным и нечётным, то Вася говорит неправду.

Комментарий. Доказано, что если книги расставлены красиво на 2 полках, то книг нечётное количество — 2 балла.

Доказано, что если книги расставлены красиво на 4 полках, то книг чётное количество — 3 балла.

- 11.2. В какое наибольшее количество цветов можно раскрасить клетки квадрата 3×3 так, чтобы для любых двух разных цветов нашлись клетка первого цвета и клетка второго, имеющие общую сторону?

Ответ. 5.

Первое решение. Допустим, есть нужная раскраска с $n \geq 6$ цветами. Если клеток каждого из цветов не менее 2, то всего клеток должно быть не менее $6 \cdot 2 = 12$. Значит, найдётся цвет, представленный единственной клеткой. У этой клетки не более 4 соседей, значит, мы не способны реализовать все $n - 1 \geq 5$ пар цветов, в которых этот цвет участвует.

Пример нужной раскраски для 5 цветов:

3	2	4
1	5	3
2	4	1

Второе решение. Всего есть 12 пар соседних клеток. Если бы у нас было 6 или более цветов, то потребовалось бы не меньше $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15 > 12$ таких пар клеток для реализации всех возможных пар цветов. Значит, цветов не более 5.

Пример такой же, как и в первом решении.

Комментарий. Только ответ — 1 балл.

Есть ответ и пример, при котором ответ достигается — 3 балла.

Доказано, что количество цветов не превосходит 5 — 4 балла.

- 11.3. Найдите все тройки неотрицательных действительных чисел x , y и z , для которых $\sqrt{x-y+z} = \sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z}$.

Ответ. (t, t, u) и (t, u, u) , где t и u — произвольные неотрицательные числа.

Решение. Так как $\sqrt{x-y+z} = \sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z}$, то $\sqrt{x-y+z} + \sqrt{y} = \sqrt{x} + \sqrt{z}$, $(\sqrt{x-y+z} + \sqrt{y})^2 = (\sqrt{x} + \sqrt{z})^2$, $x - y + z + 2\sqrt{x-y+z} \cdot \sqrt{y} + y = x + 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{z} + z$, $\sqrt{x-y+z} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{z}$. Отсюда $-(x-y+z)y = xz$, $x(y-z) + y(z-y) = 0$, $(x-y)(y-z) = 0$. Значит, никаких других троек решений, кроме как тех, в которых $x = y$, и тех, в которых $y = z$, быть не может. Несложно убедиться, что все такие тройки подходят.

Комментарий. Только ответ — 1 балл.

- 11.4. У Винни-Пуха есть 99 горшков с мёдом и один пустой горшок. Он хочет передать Пятачку половину своего мёда на хранение. Пух хочет выбрать один из горшков и перелить часть его содержимого в пустой горшок таким образом, чтобы образовавшиеся 100 горшков с мёдом можно было разделить на 2 непересекающиеся группы по 50 горшков в каждой, с одинаковой массой мёда в обеих группах. Всегда ли он сможет это сделать? Массы мёда в горшках не обязательно одинаковые. Пустой горшок способен вместить весь мёд из любого непустого горшка.

Ответ. Да.

Первое решение. Упорядочим массы мёда в исходных горшках по неубыванию: $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{99}$. Разделим горшки на две группы: в первой будут горшки с нечётными номерами, меньшими 99, во второй — горшки с чётными номерами. Если мы просуммируем неравенства вида $a_{2k-1} \leq a_{2k}$, то получим $a_1 + a_3 + \dots + a_{97} \leq a_2 + a_4 + \dots + a_{98}$. Значит, масса мёда в первой группе не больше массы мёда во второй. Но $a_1 + a_3 + \dots + a_{97} + a_{99} > a_2 + a_4 + \dots + a_{98}$, ибо разность левой и правой

части $a_1 + (a_3 - a_2) + \dots + (a_{99} - a_{98}) > 0$ как сумма одного положительного и 49 неотрицательных чисел.

Итак, какая-то часть мёда x (возможно, пустая) в 99-м горшке способна уравнивать массы групп. Часть, дополняющую x до массы мёда во всём горшке (точно не пустую), разделим на две равные части. Одну оставим в горшке, вторую перельём в пустой. Добавление обновлённого 99-го горшка к первой группе и 100-го горшка ко второй группе уравнивает массы мёда в группах.

Второе решение. Пусть общая масса мёда в горшках — s . Предположим, что нам удалось найти группу A из 50 горшков с общей массой мёда $t > \frac{s}{2}$, при этом в A есть группа B из 49 горшков с общей массой мёда в них $u < \frac{s}{2}$. Пусть C — горшок из A , не попавший в B , и масса мёда в нём равна z . Так как $u < \frac{s}{2}$ и $u + z > \frac{s}{2}$, то есть какая-то непустая масса мёда y в C такая, что $u + y = \frac{s}{2}$. Значит, если мы оставим эту массу в C , а оставшуюся часть перельём в пустой горшок, то получим 50 горшков, масса мёда в которых $\frac{s}{2}$. Понятно, что масса мёда в остальных горшках также будет равна $\frac{s}{2}$. Поэтому вся задача сводится к нахождению такой пары групп A и B .

Расставим горшки по кругу и будем делить их хордами, близкими к диаметру, на части по 49 и 50 горшков. Масса мёда хотя бы одной из групп по 50 подряд идущих горшков превосходит $\frac{s}{2}$. Действительно, если масса любой такой группы по 50 горшков меньше или равна $\frac{s}{2}$, то просуммируем все эти 99 неравенств. В результате получим, что $50s \leq \frac{99s}{2}$, что невозможно.

Итак, рассмотрим группу из 50 подряд идущих горшков, масса которых больше $\frac{s}{2}$. Если мы можем найти среди них 49 суммарной массой, меньшей $\frac{s}{2}$, задача решена. Предположим, что масса любого набора из 49 горшков не меньше $\frac{s}{2}$. Выкинем из 50 горшков один из крайних и добавим новый горшок с другого края. Так как мы сохранили одну из групп по 49 горшков, суммарная масса новой группы из 50 горшков всё ещё больше $\frac{s}{2}$. Снова ищем среди них 49 суммарной массой меньшей $\frac{s}{2}$. Будем продолжать эту операцию. Если на каком-то шаге такая группа из 49 горшков среди 50 горшков найдётся, то задача решена. В противном случае любая группа из 49 подряд идущих горшков имеет массу, не меньшую $\frac{s}{2}$. Но если просуммировать массы всех этих 99 групп мы получим $49s \geq \frac{99s}{2}$, что невозможно. Итак, такая пара групп найдётся, что решает задачу.

Третье решение. Пусть общая масса мёда в горшках — s . Отсортируем горшки по массе мёда и выберем 50 самых тяжёлых. Обозначим группу этих горшков за A , а группу оставшихся 49 с мёдом — за B , пустой пока оставим в сторонке. Каждый горшок из A не легче каждого из B , отсюда сразу следует, что суммарная масса мёда в A больше $\frac{s}{2}$.

Будем менять по одному горшок из A на горшок из B , при этом уже поменянные горшки не трогаем. Если в первый раз после очередного обмена

горшка a из A на b из B всего мёда в A стало не больше половины — берём горшок a и откладываем из него часть мёда в пустой так, чтобы в A осталась ровно половина (далее для массы мёда в горшке будем использовать его название). Это возможно сделать, так как если текущая масса мёда в A (без a) равна x , то $x + a > \frac{s}{2}$ и $x + b \leq \frac{s}{2}$, значит, найдётся такое c , что $x + c = \frac{s}{2}$ и $b \leq c < a$, значит, достаточно оставить в a массу c .

Пусть заменили 49 горшков из A на 49 из B , но при этом всё равно масса мёда в A больше $\frac{s}{2}$. Если перелить весь мёд из 50-го (нетронутого) горшка в пустой, то в A останется в точности изначальная масса мёда в B , то есть меньше $\frac{s}{2}$. Но значит, можно перелить такую часть, что в A останется ровно $\frac{s}{2}$. Понятно, что в оставшихся горшках масса мёда также $\frac{s}{2}$.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Сформулировано, что задача эквивалентна нахождению групп A и B из первого абзаца второго решения — 2 балла.

Доказано существование групп A и B из первого абзаца второго решения — 6 баллов.

Баллы по двум предыдущим пунктам не суммируются.

- 11.5. Центр квадрата $ABCD$ совпадает с точкой пересечения биссектрис прямоугольного треугольника PTN , при этом точки A и B лежат на гипотенузе PT . Докажите, что $\angle ANB = 45^\circ$.

Решение. Пусть I — центр вписанной в треугольник PTN окружности. Тогда диагонали квадрата $ABCD$ пересекаются в точке I . Пусть окружность, вписанная в треугольник PTN , касается сторон NP , NT и PT соответственно в точках T_1 , P_1 и N_1 .

Так как NI — биссектриса угла TNP и AI — биссектриса угла DAB , то $\angle T_1NI = \angle N_1AI = 45^\circ$. Так как IT_1 и IN_1 — радиусы, проведённые в точки касания, то $IT_1 = IN_1$ и $\angle NT_1I = \angle IN_1A = 90^\circ$. Итак, прямоугольные треугольники T_1NI и N_1AI равны по катету и острому углу, поэтому $NI = AI$.

Треугольник AIB прямоугольный и равнобедренный, поэтому $AI = BI$ и $\angle AIB = 90^\circ$ (Это следствие из свойств квадрата. Например, можно сослаться на то, что $\angle CAB = \angle DBA = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$). Так как $NI = AI = BI$, то I — центр описанной около треугольника ABN окружности, а угол ANB вписан в эту окружность, значит, $\angle ANB = \frac{1}{2}\angle AIB = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$.

Комментарий. Доказано, что $\triangle T_1NI = \triangle N_1AI$ — 3 балла.

Доказано, что $NI = AI = BI$ — 4 балла.

Баллы по этим двум критериям не суммируются.