Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2024 – 2025 учебном году

11 класс

Время выполнения заданий — 3 часа 55 минут

11.1. *Пусть* $P(x) = x^2 - 38x - 80$. *Решите уравнение*

$$P(x) = P\left(\frac{x+4}{x+1}\right).$$

Решение: Графиком функции $y = P(x)$ является парабола, поэтому равенство $P(a) = P(b)$ выполнено в двух случаях: либо $a = b$, либо точки a и b симметричны относительно точки x_0 — абсциссы вершины параболы, то есть выполнено условие $a + b = 2x_0$. (Эти же равенства легко получаются формальной подстановкой функции P в уравнение.) В первом случае имеем

$$x = \frac{x+4}{x+1},$$

откуда $x = \pm 2$, во втором (с учётом равенства $x_0 = \frac{38}{2\cdot 1} = 19$) —

$$x + \frac{x+4}{x+1} = 38,$$

откуда $x = 18 \pm \sqrt{358}$.

Ответ: $x = \pm 2$, $x = 18 \pm \sqrt{358}$.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ	7 баллов
При верном ходе решения получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	6 баллов
Доказано, что уравнение равносильно совокупности уравнений $x = \frac{x+4}{x+1}$ и $x + \frac{x+4}{x+1} = 38$ и одно из них верно решено	4 балла
Доказано, что уравнение равносильно совокупности уравнений $x = \frac{x+4}{x+1}$ и $x + \frac{x+4}{x+1} = 38$, но эти уравнения не решены	3 балла
Решение верно сведено к нахождению корней многочлена четвёртой степени	1 балл
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов

11.2. *Пусть площадь трапеции равна 1. Какую наименьшую величину может иметь её наибольшая диагональ?*

Решение:

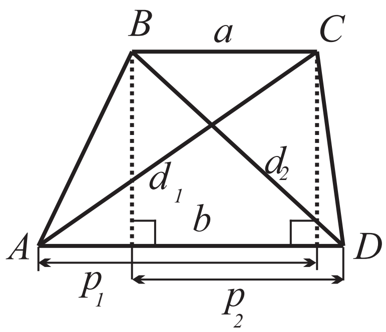
<u>Способ 1.</u> Пусть диагонали трапеции равны d_1 и d_2 ($d_1 \geqslant d_2$), угол между ними равен α, площадь трапеции равна S. Тогда

$$1 = S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\alpha \leqslant \frac{1}{2}d_1^2 \cdot 1,$$

откуда $d_1 \geqslant \sqrt{2}$. Пример, когда наибольшая диагональ равна $\sqrt{2}$, даёт равнобедренная трапеция с перпендикулярными диагоналями.

Примечание: Как следует из приведённого доказательства, задача (и ответ к ней) не меняется, если вместо трапеции рассматривать произвольный выпуклый четырёхугольник.

<u>Способ 2.</u> Пусть $ABCD$ — трапеция с основаниями $BC = a$, $AD = b$ высотой h и диагоналями $AC = d_1$, $BD = d_2$ ($d_1 \geqslant d_2$). Пусть $AC_1 = p_1$ — проекция AC на прямую AD, $DB_1 = p_2$ — проекция BD на прямую AD (см. рисунок). Можно считать, что обе проекции целиком лежат внутри основания AD: в противном случае длина диагоналей не наименьшая, так как сдвинув верхнее основание параллельно нижнему, мы получим трапецию той же площади, у которой большая диагональ уменьшились.



К решению задачи 11.2, способо 2

Ясно, что $p_1 + p_2 = a + b$. $d_1 \geqslant d_2$, поэтому $p_1 \geqslant p_2$, следовательно,

$$p_1 \geqslant \frac{a+b}{2}.$$

По условию имеем

$$1 = S_{ABCD} = \frac{a+b}{2}\cdot h \leftrightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{1}{h} \Rightarrow d_1^2 = p_1^2 + h^2 \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + h^2 \geqslant \frac{1}{h^2} + h^2 \geqslant 2,$$

причём равенство в последнем неравенстве достигается при $h = 1$. Поэтому наименьшее значение d_1 равно $\sqrt{2}$, и оно достигается на равнобедренной трапеции с перпендикулярными диагоналями.

Ответ: $\sqrt{2}$.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Доказано, что длина большей из диагоналей не меньше $\sqrt{2}$	3 балла
Приведён пример трапеции, на которой достигается минимум большей диагонали (равнобедренная с наклоном диагоналей $45°$)	2 балла
Примеры «неоптимальных» трапеций и/или неточные оценки	0 баллов

11.3. *У фокусника есть 25 цилиндров, ровно в двух из которых сидит по одному кролику. За один вопрос можно указать на один или два цилиндра и спросить, сидит ли там хотя один кролик (фокусник честно Вам ответит «да» или «нет»). За какое наименьшее количество вопросов можно гарантированно найти хотя бы один цилиндр с кроликом? Ответ обоснуйте.*

Решение: Покажем, что достаточно 12 вопросов. Распределим цилиндры на 11 пар и одну тройку. Первыми 11-ю вопросами спросим про все пары. Если среди полученных ответов есть хоть один положительный, то мы нашли пару цилиндров, в которой сидит хотя бы один кролик. Тогда 12-м вопросом спрашиваем про любой из двух цилиндров этой пары и находим этого кролика. Пусть все ответы на первые 11 вопросов отрицательны. Значит, оба кролика сидят в двух цилиндрах из тройки. 12-м вопросом спросим про один из этих трёх цилиндров. Если ответ «да», то цилиндр найден. Если «нет» — оба кролика в двух цилиндрах, про которые не спрашивалось — найдены оба.

Покажем, что 11 вопросов может не хватить. Действительно, пусть на все наши вопросы последовал ответ «нет». Тогда оба кролика в тех цилиндрах, про которые мы не спросили, а этих цилиндров не меньше 3 (ведь мы можем спросить максимум про $2 \cdot 11 = 22$ цилиндра). Значит, мы не можем указать ни одного цилиндра, в котором точно сидит кролик.

Ответ: За 12 вопросов.

Примечание: Можно также доказать, что 11 вопросов не хватит даже в случае, когда цилиндров не 25, а всего 24.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Доказано, что 11 вопросов может и не хватить	3 балла
Приведён верный алгоритм гарантированного нахождения кролика за 12 вопросов	2 балла
Неточные оценки и/или алгоритмы, требующие более 12 вопросов	0 баллов

11.4. *Пусть* $x, y, z \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} \sin x \cos y &= \sin z, \\ \cos x \sin y &= \cos z. \end{cases}$$

Решение:

Способ 1. Возведём обе части каждого из уравнений в квадрат, а затем сложим уравнения почленно. Получим

$$\sin^2 x \cos^2 y + \cos^2 x \sin^2 y = 1.$$

Представив 1 в правой части в виде $\sin^2 x + \cos^2 x$ и проведя равносильные преобразования, получим $\sin^2 x \sin^2 y + \cos^2 x \cos^2 y = 0$. Каждое слагаемое в левой части неотрицательно, поэтому из уравнения следует что оба слагаемых равны нулю одновременно. Синус и косинус одного числа не могут одновременно обращаться в ноль, поэтому возможны лишь два варианта: 1) $\sin x = \cos y = 0$ и 2) $\sin y = \cos x = 0$. Учитывая, что x и y лежат в первой четверти, получим либо $x = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$, и тогда $z = 0$, либо $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, и тогда $z = \frac{\pi}{2}$.

Способ 2. Сложим левые и правые части уравнений:

$$\sin x \cos y + \cos x \sin y = \sin z + \cos z;$$

$$\sin (x + y) = \sin z + \cos z.$$

Выражение, стоящее в левой части полученного уравнения, не превосходит 1. Покажем, что левая часть уравнения не меньше 1, для чего рассмотрим функцию $f(z) = \sin z + \cos z$ при $z \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда

$$f'(z) = \cos z - \sin z = 0 \leftrightarrow \operatorname{tg} z = 1 \leftrightarrow z = \frac{\pi}{4},$$

и наименьшее значение функция $f(z)$ принимает в одной из точек $0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$. Так как $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, а $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}$, это наименьшее значение равно 1. Значит, при всех $z \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ выполнено неравенство $\sin z + \cos z \geqslant 1$, причём равенство достигается при $z = 0$ или при $z = \dfrac{\pi}{2}$.

Из доказанного следует, что уравнение имеет решение только при таких значениях z и при условии $\sin(x + y) = 1 \leftrightarrow x + y = \dfrac{\pi}{2}$. Тогда $\cos y = \sin x$, система приобретает вид $\sin^2 x = \sin z$, $\sin^2 y = \cos z$ и, перебрав оба допустимых значения z, получаем ответ.

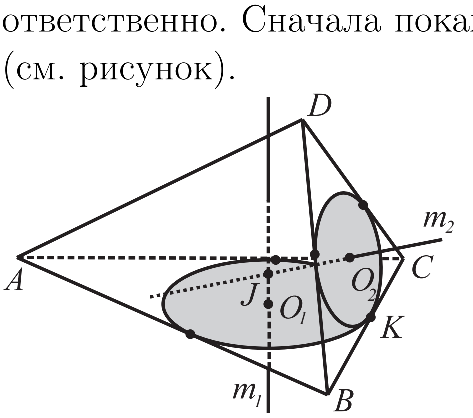
Ответ: $(x;\, y;\, z) = \left(0; \dfrac{\pi}{2}; 0\right)$ или $(x;\, y;\, z) = \left(\dfrac{\pi}{2}; 0; \dfrac{\pi}{2}\right)$

Рекомендации по проверке:

есть в работе	баллы
Верный обоснованный ответ	7 баллов
Доказано, что $\sin z + \cos z \geqslant 1$ при всех $z \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$	3 балла
Верно получено, но не решено (решено неверно) тригонометрическое уравнение-следствие, содержащее только 2 переменных	2 балла
Приведён верный ответ, но не доказано, что других троек (x, y, z), удовлетворяющих системе из условия, не существует	1 балл
Преобразования и выкладки, не ведущие к ответу	0 баллов

11.5. *В каждую грань треугольной пирамиды вписали окружность. Оказалось, что все четыре вписанных окружности попарно касаются друг друга. Затем из центра каждой окружности построили перпендикуляр к той грани пирамиды, в которой находится эта окружность. Докажите, что все четыре построенных перпендикуляра пересекаются в одной точке.*

Решение: Пусть O_1, O_2, O_3 и O_4 — центры окружностей, вписанных в грани ABC, BCD, CDA и DAB пирамиды $ABCD$. Пусть m_1, m_2, m_3 и m_4 — перпендикуляры к граням пирамиды, восстановленные в точках O_1, O_2, O_3 и O_4 соответственно. Сначала покажем, что эти перпендикуляры попарно пересекаются (см. рисунок).



К решению задачи 11.5

Достаточно доказать, что пересекаются прямые m_1 и m_2 (остальные пять случаев аналогичны). Вписанные в грани ABC и BCD окружности по условию касаются друг друга. Точка их касания обязана лежать на ребре BC — обозначим её буквой K. По свойству касательной к окружности $O_1K \perp BC$ и $O_2K \perp BC$. Тогда плоскость O_1O_2K. перпендикулярна ребру BC. Проведём в плоскости O_1O_2K

через точку O_1 прямую, перпендикулярно прямой O_1K. Эта прямая будет также перпендикулярна и прямой BC, следовательно, будет перпендикулярна плоскости ABC, то есть совпадать с прямой m_1. Мы доказали, что $m_1 \subset O_1O_2K$. Аналогично показывается, что $m_2 \subset O_1O_2K$, то есть прямые m_1 и m_2 лежат в одной плоскости. Так как m_1 и m_2 не параллельны (иначе были бы параллельны грани ABC и BCD), они пересекаются.

Мы имеем 4 попарно пересекающиеся прямые m_1, m_2, m_3 и m_4, причём они не лежат в одной плоскости (иначе в этой плоскости лежали бы центры вписанных окружностей во все 4 грани). Обозначим буквой J точку пересечения каких-то двух из них, например, прямых m_1 и m_2. Если прямая m_3 не проходит через точку J, то она пересекает прямые m_1 и m_2 в двух различных точках, поэтому лежит в плоскости π, образуемой этими прямыми. Прямая m_4, не лежит в плоскости π, поэтому она пересекает её ровно в одной точке. Но тогда она не может иметь общих точек со всеми тремя прямыми m_1, m_2, m_3. Противоречие. Итак, прямая $m_3 \ni J$. Аналогично, $m_4 \ni J$. Значит, все перпендикуляры m_1, m_2, m_3 и m_4 проходят через одну точку J, ч. т. д.

Примечание: Несложно доказать, что точка пересечения четырёх указанных перпендикуляров равноудалена от всех шести рёбер тетраэдра. Это означает наличие сферы (с центром в указанной точке), касающейся всех рёбер тетраэдра (не для всякого тетраэдра такая сфера существует). Тетраэдр, для которого существует сфера, касающаяся всех его рёбер, называется *каркасным.* Можно доказать, что наоборот, из каркасности тетраэдра следует данное в условии задачи свойство. Таким образом, попарное касание вписанных в грани окружностей — это критерий того, что тетраэдр является каркасным.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верное доказательство	7 баллов
Доказано,что перпендикуляры пересекаются попарно	5 баллов
Доказано, что плоскость, проходящая через центры двух вписанных в грани окружностей и точку их касания, перпендикулярна соответствующему ребру тетраэдра	3 балла
Рассуждения, из которых не видно идеи доказательства	0 баллов

11.6. *9 шахматистов сыграли двухкруговой шахматный турнир: в каждом круге каждый участник сыграл с каждым одну партию. Известно, что после первого круга у всех участников было разное количество очков. Могло ли так случиться, что по окончании турнира у всех участников снова было разное количество очков, но при этом шахматисты расположились (по количеству набранных очков) в порядке, обратном тому, какой был после первого круга. Ответ* *обоснуйте. В шахматах за победу дается 1 очко, за ничью — пол-очка, за поражение — 0 очков.*

Решение: Приведём пример, когда описанная в условии ситуация будет иметь место. Пусть по окончании первого круга турнирная таблица выглядела следующим образом:

Участники	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	•	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1	1	1
2	0,5	•	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1	1
3	0,5	0,5	•	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1
4	0,5	0,5	0,5	•	0,5	0,5	0,5	0,5	1
5	0,5	0,5	0,5	0,5	•	0,5	0,5	0,5	0,5
6	0	0,5	0,5	0,5	0,5	•	0,5	0,5	0,5
7	0	0	0,5	0,5	0,5	0,5	•	0,5	0,5
8	0	0	0	0,5	0,5	0,5	0,5	•	0,5
9	0	0	0	0	0,5	0,5	0,5	0,5	•

Из таблицы видно, что игрок, занимающий k-е место ($1 \leqslant k \leqslant 9$) сейчас имеет в своём активе ровно $6{,}5 - 0{,}5k$ очков.

Пусть второй круг оказался сверхрезультативным, и в каждой партии победил тот из игроков, кто по результатам первого круга имел меньше очков. Тогда игрок, занимающий после первого круга место k ($1 \leqslant k \leqslant 9$) выиграл во втором круге ровно $k-1$ партию (у игроков, занимающих места с 1 по $k-1$), проиграв остальные. Значит, по итогам всего турнира он набрал $6{,}5-0{,}5k+k-1 = 0{,}5k+5{,}5$ очков. То есть чем больше k (и ниже место, которое он занимал по окончании первого круга), тем больше очков он набрал в итоге (и тем выше место, которое он в итоге занял). Значит, порядок следования игроков изменился на противоположный.

Ответ: могло.

Примечание: Можно доказать, что приведённый пример турнира в некотором смысле единственный. Точнее, условие задачи выполнится тогда и только тогда, когда по окончании первого круга игроки наберут именно то количество очков, которое приведено в примере из решения, и второй круг сыграют так, как указано в приведённом решении.

Рекомендации по проверке:

есть в работе	**баллы**
Верный обоснованный ответ (приведён пример такого турнира с указаниями результатов всех партий)	7 баллов
Верный пример, в котором не показано, как шахматисты играли в первом круге, а указано только количество набранных ими в этом круге очков	5 баллов
Установлено, сколько очков после каждого круга должен иметь каждый участник турнира: $6, 5{,}5, 5, \ldots, 3$ после первого и $6, 6{,}5, 7, \ldots, 12$ после второго	3 балла
Доказано, что в таком турнире (если он есть) в каждой партии второго круга побеждал тот шахматист, у кого после первого круга было меньше очков	2 балла
Ответ без обоснования или с неверным обоснованием	0 баллов