

11 класс

1. В семизначном числе зачеркнули одну из цифр и из исходного числа вычли это шестизначное. В результате получили число 1234567. Найдите исходное число.

Ответ: 1371741.

Решение. Пусть x — полученное после зачёркивания цифры шестизначное число. Заметим, что зачёркнутая цифра была последней в исходном числе, так как в противном случае после вычитания последняя цифра была бы нулем. Пусть это цифра y . Тогда разность исходного и полученного числа равна $(10x+y)-x = 1234567$, то есть $9x+y = 9 \cdot 137174 + 1$. Значит, цифра y равна остатку от деления числа 1234567 на 9, а x равно частному от деления, то есть $y = 1$ и $x = 137174$.

Критерии. Верный ответ без объяснений — 2 балла. Доказано, что в исходном числе зачёркнута последняя цифра — ещё 1 балл. Доказано, что последняя цифра совпадает с остатком при делении на 9 — ещё 2 балла. Задача полностью решена в предположении, что зачёркнута последняя цифра — 5 баллов. Арифметическая ошибка — снимается 1 балл. Полное решение — 7 баллов.

2. При каких значениях a функция $f(x)$ будет нечётной?

$$f(x) = \frac{2^x - a}{2^x + a}.$$

Ответ: при $a = -1$ и $a = 1$.

Решение. Проверим свойство нечётности для функции $f(x)$. Имеем

$$f(-x) = \frac{2^{-x} - a}{2^{-x} + a} = \frac{1 - a \cdot 2^x}{1 + a \cdot 2^x}.$$

Сумма этих значений функции равна:

$$f(x) + f(-x) = \frac{(1 - a^2) \cdot 2^{x+1}}{(2^x + a)(1 + a \cdot 2^x)}.$$

Равенство $f(x) = -f(-x)$ возможно только при условии $1 - a^2 = 0$, то есть при $a = \pm 1$. При этих значениях область определения функции f — вся числовая ось, за исключением $x = 0$ при $a = -1$, — симметрична относительно начала координат. Таким образом, при $a = \pm 1$ выполняются оба условия в определении свойства нечётности функции f .

Критерии. Только ответ — 0 баллов. Подбором установлено, что при $a = 1$ или $a = -1$ функция $f(x)$ чётная, — 2 балла. Доказано равенство $1 - a^2 = 0$, необходимое для чётности $f(x)$, — 5 баллов. Пропущено условие симметричности (относительно 0) области определения $f(x)$ при $a = -1$ — снимается 1 балл. Пропущен один из случаев $a = -1$ или $a = 1$ — снимается 1 балл. Полное решение — 7 баллов.

3. В некотором государстве есть 13 городов. Между некоторыми парами городов будут установлены двусторонние прямые автобусные, железнодорожные или самолетные сообщения. Какое *наименьшее* возможное количество сообщений необходимо установить, чтобы, выбрав любые два вида транспорта, можно было добраться из любого города в любой другой, не используя третий вид транспорта?

Ответ: 18 сообщений.

Решение. Пример для 18 сообщений показан на рис. 6. Красные, синие и зелёные линии (рёбра) обозначают три различных вида транспорта. В этом графе любые два города A и B соединяются друг с другом через город O дорогой из одного или двух рёбер, то есть из A в B можно добраться, не используя третий вид транспорта.

С другой стороны, связный граф с 13 вершинами имеет не менее 12 рёбер, поэтому общее количество соединений для любых двух видов транспорта составляет по крайней мере 12. Таким образом, удвоенное общее количество всех соединений составляет по крайней мере $12 + 12 + 12 = 36$, то есть количество рёбер в таком графе не менее $36:2 = 18$.

Критерии. Правильно указана конструкция примера — 3 балла. Доказано, что число сообщений не меньше 18 — ещё 4 балла. Арифметическая ошибка при подсчёте числа рёбер — снимается 1 балл. Полное решение — 7 баллов.

4. Сумма положительных чисел a, b, c равна 1. Докажите, что

$$\frac{a^2 + b}{b + c} + \frac{b^2 + c}{c + a} + \frac{c^2 + a}{a + b} \geq 2$$

Решение. Используя равенство $a = 1 - b - c$, сначала преобразуем числитель первой дроби: $a^2 + b = a(1 - b - c) + b = a + b - a(b + c)$, и значит, Рис. 6

$$\frac{a^2 + b}{b + c} = \frac{a + b - a(b + c)}{b + c} = \frac{a + b}{b + c} - a,$$

поэтому

$$\frac{a^2 + b}{b + c} + \frac{b^2 + c}{c + a} + \frac{c^2 + a}{a + b} = \frac{a + b}{b + c} + \frac{b + c}{c + a} + \frac{c + a}{a + b} - (a + b + c).$$

Слагаемое $a + b + c$ равно 1, поэтому требуемое неравенство можно переписать в виде

$$\frac{a + b}{b + c} + \frac{b + c}{c + a} + \frac{c + a}{a + b} - 1 \geq 2, \text{ то есть } \frac{a + b}{b + c} + \frac{b + c}{c + a} + \frac{c + a}{a + b} \geq 3.$$

Осталось воспользоваться неравенством Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом $\geq \sqrt[3]{xyz}$. Тогда для

трёх положительных чисел: $x + y + z \geq 3$

$$\frac{a + b}{b + c} + \frac{b + c}{c + a} + \frac{c + a}{a + b} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{a + b}{b + c} \cdot \frac{b + c}{c + a} \cdot \frac{c + a}{a + b}} = 3,$$

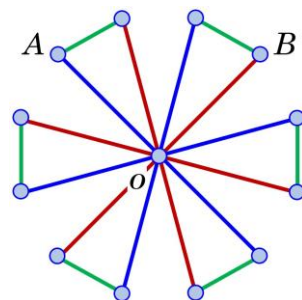
что и требовалось.

Критерии. Неравенство приведено к равносильной форме

$$\frac{a + b}{b + c} + \frac{b + c}{c + a} + \frac{c + a}{a + b} \geq 3$$

— 4 балла. Полное решение — 7 баллов.

5. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, а его диагонали пересекаются в точке M . Точки E и F являются серединами сторон AB и CD соответственно, а точки K и L — проекции точки M на стороны BC и AD . Докажите, что прямые EF и KL перпендикулярны.



Решение. (Рис. 7.) Пусть X и Y — середины отрезков AM и BM соответственно. Отрезки LX и KY — медианы прямоугольных треугольников ALM и BKM , проведённые из вершин прямых углов, а EX и EY — средние линии треугольника AMB , поэтому

$$LX = \frac{1}{2}AM = EY, \quad KY = \frac{1}{2}BM = EX.$$

Кроме того, четырёхугольник $EXMY$ — параллелограмм, вписанные углы CAD и CBD опираются на одну и ту же дугу, а $\angle LXM$ и $\angle KYM$ — внешние углы треугольников AXL и BYK , поэтому

$$\angle EXM = \angle EYM, \angle LXM = 2\angle CAD = 2\angle CBD = \angle KYM.$$

Значит,

$$\angle LXE = \angle LXM + \angle EXM = \angle KYM + \angle EYM = \angle KYE.$$

Следовательно, треугольники LXE и KYE равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $EL = EK$, то есть точка E равноудалена от концов отрезка KL . Аналогично точка F также равноудалена от концов этого отрезка. Значит, прямая EF — серединный перпендикуляр к отрезку KL , то есть $EF \perp KL$.

Критерии. Доказано, что $EXMY$ является параллелограммом — 2 балла. Доказано равенство углов LXE и KYE — ещё 1 балл. Доказано равенство треугольников LXE и KYE (и значит, $EL = EK$) — ещё 2 балла. Критерии суммируются. Полное решение — 7 баллов.

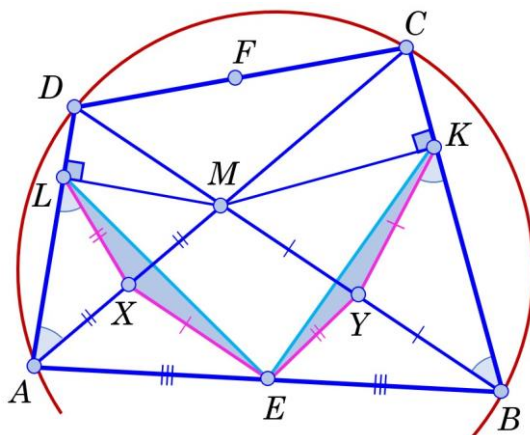


Рис. 7