

*Ключи к заданиям муниципального этапа
всероссийской олимпиады школьников
2024/2025 учебного года
по математике
11 класс*

**Методические рекомендации
для жюри муниципального этапа олимпиады
по оцениванию работ участников**

Общие критерии оценок приводятся в следующей достаточно условной таблице. К некоторым задачам имеются дополнительные комментарии к оцениванию.

Оценка	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрено отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример.
1 – 2	Решения нет, но есть некоторые продвижения, которые являются частью решения.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении). Дан ответ к задаче без обоснования, если этот ответ не подсказан условием, не является очевидным и может задать направление поиска решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют
0	Решение отсутствует.

1. Любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты.
2. Олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении.
3. Баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, но не содержащего продвижений в решении задачи.
4. Победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

Условия и решения задач

11.1 Миллион представлен как сумма двух натуральных слагаемых, каждое из которых делится на сумму цифр другого. Докажите, что слагаемые чётны.

Решение. Обозначим натуральные слагаемые буквами A и B , тогда исходное условие примет вид

$$1000000 = A + B.$$

Количество цифр в каждом из слагаемых не может быть больше шести, поэтому можем представить числа A и B в виде:

$$A = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6}, \quad B = \overline{b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6},$$

где $a_i, b_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$.

Числа A и B не могут быть разной чётности, иначе их сумма была бы нечётной.

Предположим, что они нечётные, тогда a_6 и b_6 нечётные.

Рассмотрим суммы цифр, стоящих на одинаковых местах:

$$a_6 + b_6 = 10, \quad a_5 + b_5 = 9, \dots, a_1 + b_1 = 9.$$

Следовательно, при $1 \leq i \leq 5$ одно из чисел a_i и b_i чётное, а другое — нечётное. Другими словами, если среди чисел a_i при $1 \leq i \leq 5$ имеется k нечётных, то среди чисел b_i при $1 \leq i \leq 5$ нечётных будет $5 - k$.

Так как мы предположили, что нечётны оба числа a_6 и b_6 , то суммы

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) \quad \text{и} \quad (b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6)$$

имеют разную чётность, и нечётные числа A и B не могут делиться на то из них, которое чётное. Противоречие.

Оба числа A и B могут быть чётными, например $A = B = 500\,000$.

□

Комментарий. Доказательство невозможности нечётных слагаемых — 6 баллов.

11.2 Решите уравнение

$$\sin^{2025} x + \cos^{2025} x = 1.$$

Ответ: $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Решение. Запишем уравнение в виде:

$$\sin^2 x (1 - \sin^{2023} x) + \cos^2 x (1 - \cos^{2023} x) = 0.$$

Оба слагаемых в левой части неотрицательны, поэтому равенство возможно лишь в случае, когда оба они равны нулю. Поскольку $\sin x$ и $\cos x$ не могут быть равны нулю одновременно, то получим две системы уравнений:

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 0 \end{cases}$$

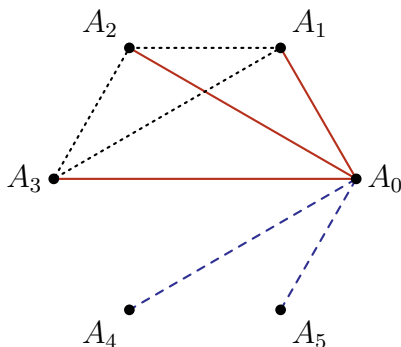
Таким образом, решения будут:

$$x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{или} \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

□

11.3 Каждую сторону и каждую диагональ выпуклого шестиугольника покрасили в один из двух цветов — красный или синий. Докажите, что найдётся хотя бы один треугольник, образованный тремя вершинами и отрезками между ними, такой, что все его стороны окрашены в один цвет.

Решение. Обозначим вершины шестиугольника $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$. Рассмотрим отрезки, соединяющие эти точки. Для наглядности будем обозначать красные отрезки сплошной линией, а синие — пунктирной линией, как показано на диаграмме.



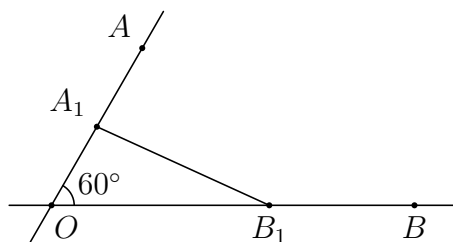
Рассмотрим пять отрезков, исходящих из точки A_0 : $A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3, A_0A_4, A_0A_5$. Каждый из этих отрезков окрашен либо в красный, либо в синий цвет. По принципу Дирихле, среди них обязательно найдутся как минимум три отрезка одного цвета. Без ограничения общности можно предположить, что три из них красные, а именно A_0A_1, A_0A_2 , и A_0A_3 .

Теперь рассмотрим треугольник, образованный точками A_1, A_2 и A_3 . Если хотя бы одна его сторона красная, то существует красный треугольник, то есть все его стороны красные. В противном случае все три стороны треугольника $A_1A_2A_3$ синие, и тогда утверждение задачи также выполняется. $\square$

11.4 Два железнодорожных пути пересекаются в точке O под углом 60° . К месту пересечения выезжают одновременно два поезда: пассажирский со станции A , находящейся в 30 км, и товарный со станции B — в 60 км от точки O . Пассажирский поезд идёт со скоростью 60 км/ч, а товарный — 30 км/ч. Через сколько времени поезда будут на наименьшем расстоянии друг от друга? Чему равно это расстояние?

Ответ: через $\frac{1}{2}$ часа, расстояние 45 км.

Решение. Через t часов после выезда поезда окажутся в точках A_1 и B_1 соответственно. Поскольку пассажирский поезд будет в точке O через полчаса, то $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$.



Расстояние между ними, по теореме косинусов для треугольника OA_1B_1 , будет равно

$$A_1B_1 = \sqrt{(30 - 60t)^2 + (60 - 30t)^2 - 2(30 - 60t)(60 - 30t) \cos 60^\circ}.$$

Упростим выражение:

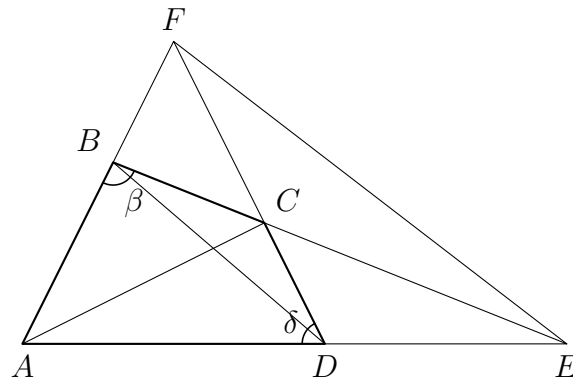
$$A_1B_1 = 30\sqrt{3(t^2 - t + 1)} = 30\sqrt{3} \cdot \sqrt{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}.$$

Расстояние между поездами будет наименьшим через $t = \frac{1}{2}$ часа и будет равно 45 км. $\square$

11.5 Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Прямые AD и BC пересекаются в точке E , а прямые AB и DC — в точке F . Докажите, что

$$\frac{S_{ACF}^2}{S_{CEF}^2} = \frac{BC \cdot AD \cdot AF}{CE \cdot DE \cdot BF}.$$

Решение.



Пусть $\angle ABC = \beta$, $\angle ADC = \delta$. Тогда, поскольку

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} AF \cdot BC \cdot \sin \beta \quad (\text{так как высота, опущенная на сторону } AF, \text{ равна } BC \cdot \sin \beta),$$

а

$$S_{CEF} = \frac{1}{2} CE \cdot BF \cdot \sin \beta,$$

то

$$\frac{S_{ACF}}{S_{CEF}} = \frac{BC \cdot AF}{CE \cdot BF}.$$

С другой стороны,

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} CF \cdot AD \cdot \sin \delta,$$

а

$$S_{CEF} = \frac{1}{2} CF \cdot DE \cdot \sin \delta,$$

откуда

$$\frac{S_{ACF}}{S_{CEF}} = \frac{AD}{DE}.$$

Из этих двух соотношений получаем требуемое равенство:

$$\frac{S_{ACF}^2}{S_{CEF}^2} = \frac{BC \cdot AD \cdot AF}{CE \cdot DE \cdot BF}.$$

$\square$