11 класс

1. Функция f задана формулой $f(x) = \dfrac{\frac{2+\sin x}{2-\sin x}+\frac{x(1+\cos x)}{1+x^2}}{\frac{2-\sin x}{2+\sin x}-\frac{x(1+\cos x)}{1+x^2}}$. Найдите произведение $f(2024)\cdot f(-2024)$.

   Ответ: 1.

   Решение. Прямое вычисление показывает, что $f(-x) = 1/f(x)$. Поэтому $f(-x)\cdot f(x) = 1$ при любом x.

   Критерии оценки.

   1) Если вычисления проведены только для $x = 2024$ — баллы не снимать.

2. Докажите, что если в сечении куба плоскостью получился треугольник, то этот треугольник остроугольный.

   Решение. Пусть в сечении куба плоскостью получился треугольник KLM, где точки K, L и M лежат на рёбрах AB, AD и AA_1 соответственно. Покажем, что все углы треугольника KLM — острые. Положим $AK = a$, $AL = b$, $AM = c$. По теореме косинусов

$$2KL\cdot LM\cdot\cos\angle KLM = KL^2 + LM^2 - KM^2 =$$
$$= (a^2+b^2) + (b^2+c^2) - (a^2+c^2) = 2b^2 > 0,$$

   откуда и следует искомое.

   Критерии оценки.

   1) В решении допущены ошибки в алгебраических преобразованиях, не повлиявших на логику решения – не более 5 баллов.

3. Для каждого значения параметра a укажите, сколько решений имеет

   а) система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2 = 1\\ x+y = a;\end{cases}$

   б) уравнение $|1-|1-x|| = a$.

Ответ: а) при $|a| < \sqrt{2}$ два решения, при $|a| = \sqrt{2}$ — одно, при $|a| > \sqrt{2}$ нет решений; б) при $a < 0$ нет решений, при $a = 0$ и $a > 1$ — два решения, при $a = 1$ — три решения, при $0 < a < 1$ — четыре решения.

Решение. а) Уравнение $x^2 + y^2 = 1$ задаёт на координатной плоскости окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Прямая $x + y = a$ отсекает от первой (при $a > 0$) или третьей (при $a < 0$) четверти координатной плоскости прямоугольный равнобедренный треугольник с катетом длины $|a|$. Высота, опущенная на гипотенузу этого треугольника, равна $\frac{|a|}{\sqrt{2}}$. Если она меньше 1 (в частности, при $a = 0$), то окружность пересекает прямую в двух точках, если равна 1 — окружность касается прямой, если больше 1 — окружность не имеет с прямой общих точек, откуда и получаем ответ.

Замечание. Задача допускает алгебраическое решение: подставить $y = a - x$ в уравнение окружности и исследовать получившееся квадратное уравнение.

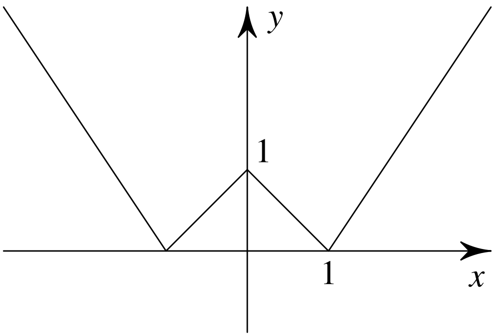

Рис. 7

б) Ответ сразу получается из рассмотрения графика функции $y = |1 - |1 - x||$, изображённого на рис. 7. Этот график можно получить, строя последовательно графики функций $y = 1 - x$, $y = |1 - x|$, $y = 1 - |1 - x|$, $y = |1 - |1 - x||$ по известным правилам преобразования графиков.

Критерии оценки.

1) Не рассмотрены граничные значения параметра a — не более 3 баллов.
2) График функции в п. б) можно построить без подробного объяснения.

4. В круг радиуса 1 вписан пятиугольник. Докажите, что сумма всех его сторон и диагоналей меньше 17.

   Решение. Сумма всех сторон пятиугольника меньше длины описанной около него окружности, а сумма пяти его диагоналей не больше упятерённого диаметра этой окружности. Значит, сумма всех сторон и диагоналей пятиугольника меньше $2\pi + 5 \cdot 2 < 2 \cdot 3{,}15 + 10 < 17$.

Критерии оценки.

1) Есть оценка периметра пятиугольника – 1 балл.
2) Оценка сумм длин всех диагоналей пятиугольника – 2 балла.

5. На окружности расположены 15 чёрных и 15 белых фишек. За один ход разрешается поменять местами любые две из них. За какое наименьшее число ходов можно из любого начального расположения фишек перейти к такому, в котором белые и чёрные фишки чередуются?

   Ответ: за 7 ходов.

   Решение. Отметим на окружности 30 точек, на которых стоят фишки, и занумеруем их по часовой стрелке числами 1, 2, …, 30. Чередование белых и чёрных фишек означает, что все точки с чётными номерами заняты фишками одного цвета, а с нечётными — другого. Поэтому задача сводится к вопросу, за какое наименьшее число ходов можно независимо от начального расположения фишек заполнить все чётные точки фишками одного цвета. Заметим, что при любом расположении среди 15 фишек, стоящих на чётных местах, не менее 8 фишек одного цвета (пусть чёрного), и мы не более чем за 7 ходов сможем заменить стоящие на чётных местах белые фишки чёрными. С другой стороны, если на чётных местах 8 чёрных и 7 белых фишек, меньше чем 7 ходами нам обойтись не удастся.

Критерии оценки.

1) Показано, что за 7 ходов можно добиться нужного результата и не показано, что это наименьшее число ходов — не более 3 баллов.
2) Показано, что в общем случае понадобится не меньше 7 ходов — не более 3 баллов.
3) Рассмотрены только частные случаи расстановки фишек — 0 баллов.