

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

Муниципальный этап.

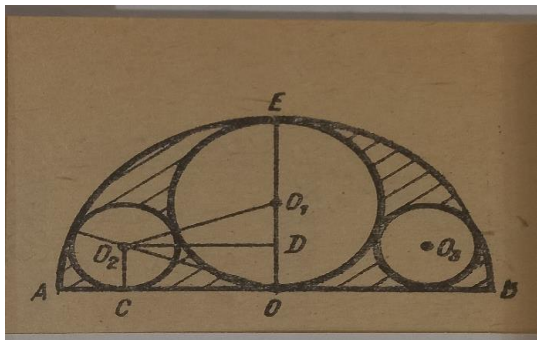
Ответы и решения

11 класс

11.1 Доказательство: Рассмотрим произвольную строку с номером i . Пусть первый член арифметической прогрессии в этой строке равен a , а разность арифметической прогрессии – d . Тогда сумма чисел в этой строке (учитывая, что в строке написано 2024 членов этой прогрессии) равна $S = 1012(2a + 2023d)$. Теперь ясно, что сумма чисел в каждой строке делится на 1012, а значит, и на 4.

11.2 Ответ: Такое расположение осуществить нельзя. **Доказательство:** Рассмотрим шесть чисел: 1, 2, 3, 13, 12, 11. Никакие два из них не могут стоять рядом. Следовательно, в шесть промежутков между ними надо поставить остальные семь чисел. В одном из этих промежутков будет два числа из оставшихся, а в остальных – по одному. Рассмотрим теперь числа 4 и 10. Каждое из них может иметь по одному соседу из чисел, выбранных первоначально. Следовательно, они оба попадают в тот же промежуток, где стоят два числа, т.е. будут стоять рядом. Но, это противоречит условию.

11.3 Ответ: $\frac{1}{8}\pi R^2$. **Решение:** $S = \frac{1}{2}S_{кр} - (S_{кр1} + 2S_{кр2})$; $S_{кр} = \pi R^2$, где $R = AO$ (рис.).
 $S_{кр1} = \pi R_1^2 = \frac{\pi R^2}{4}$, так как $R_1 = OO_1 = \frac{R}{2}$. $S_{кр2} = \pi r^2$. O_2C перпендикулярно AB , $O_2C = r$, пусть $OC = x$, $O_2O = R - r$, $O_2O_1 = \frac{R}{2} + r$. Используя теорему Пифагора для $\triangle O_2OC$ и $\triangle O_2O_1D$ получаем систему уравнений. Решая систему, получим $r = \frac{1}{4}R$. Следовательно,
 $S_{кр2} = \frac{1}{16}\pi R^2$. $S = \frac{1}{2}\pi R^2 - (\frac{\pi R^2}{4} + 2 \cdot \frac{1}{16}\pi R^2) = \frac{1}{8}\pi R^2$.



11.4. Ответ: 48 пассажиров. **Решение:** Пусть a – число пассажиров, у которых в билете есть цифра 7. Тогда число всех пассажиров равно $12a$. Заметим, что среди любых десяти подряд идущих номеров есть один, содержащих семерку на конце. Значит, $12a < 10(a + 1)$, то $2a < 10$, $a < 5$. При $a = 4$ искомый набор номеров существует, например: 100 008, 100 009, 100 010, ..., 100 055.

11.5. Решение: Рассмотрим все возможные 10 линий, по которым возможно разрезание: справа налево и сверху вниз. Предварительно докажем, что каждая из этих линий пересекает четное число косточек домино. Допустим, что это не так и какая-то линия пересекает нечетное число косточек домино. Разрежем доску по такой линии. При этом доска разделится на две части так, что в каждой будет содержаться четное число

клеток. Но если линия пересекает нечетное число косточек, то число клеток, занимаемых косточками в каждом из этих полей, будет нечетно. Получили противоречие.

Таким образом, каждая линия пересекает четное число косточек домино. Допустим теперь, что при каком-то размещении косточек каждая из 10 линий пересекает хотя бы 2 косточки, причем ясно, что две линии не пересекают одну косточку. Следовательно, мы получаем, что 10 линий пересекают по меньшей мере 20 косточек домино, тогда как их число равно 18. Полученное противоречие и доказывает то, что найдется такой способ разрезания доски на две части, при котором косточки не будут повреждены.