

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2024 – 2025 учебный год

11 класс (решения)

1. Имеется 100 гирек, масса каждой - целое число грамм, меньшее 9. Все гирьки произвольным образом разложили на две чаши весов, по 50 на каждую. Докажите, что можно убрать (снять с весов) несколько гирек так, чтобы чаши уравновесились.

Решение: Если на обеих чашах есть по одинаковой гирьке, то можно просто убрать все остальные. Рассмотрим случай, когда веса гирек на разных чашах разные. Значит, на одной чаше представлены гирьки не более, чем семи различных весов. Отсюда следует, что на каждой чаше есть не менее 8 одинаковых гирек (иначе на чаше было бы не более $7 \cdot 7 = 49$ гирек). Итак, пусть на первой чаше имеется хотя бы 8 гирек массой n грамм, а на второй - не менее восьми гирек массой m граммов. Тогда оставим на первой чаше m n -граммовых гирек, а на второй оставим n m -граммовых гирек. Чаши будут в равновесии.

2. Про натуральные числа m и n известно, что их произведение делится на их сумму, а наибольший общий делитель чисел m и n равен d . Докажите, что

$$d \geq \sqrt{m+n}.$$

Решение: Пусть $m = dm_1$, $n = dn_1$, тогда числа m_1 и n_1 взаимно просты. Условие, что mn делится на $m+n$, запишется как

$$dm_1 \cdot dn_1 = k(dm_1 + dn_1), \quad (1)$$

то есть $m_1(dn_1 - k) = kn_1$. Значит, k делится на m_1 , поскольку n_1 не имеет общих множителей с m_1 . Подобным же образом заключаем, что k делится на n_1 . Итак, $k = rm_1n_1$, где r - некоторое натуральное число. Подставляя это выражение для k в равенство 1, получаем

$$d^2m_1dn_1 = rm_1n_1 \cdot d(m_1 + n_1),$$

откуда

$$d^2 = r(dm_1 + dn_1) = r(m+n) \geq (m+n).$$

3. Докажите, что число

$$a = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{4 + \sqrt{5}}}}}$$

иррационально.

Решение: Возводя обе части равенства в квадрат, получим

$$\sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{4 + \sqrt{5}}}} = a^2 - 1,$$

$$\sqrt{3 + \sqrt{4 + \sqrt{5}}} = (a^2 - 1)^2 - 2,$$

$$\sqrt{4 + \sqrt{5}} = \left((a^2 - 1)^2 - 2\right)^2 - 3,$$

$$\sqrt{5} = \left(\left((a^2 - 1)^2 - 2\right)^2 - 3\right)^2 - 4.$$

Если бы число a было рационально, то из последнего равенства следовало бы, что $\sqrt{5}$ - рациональное число. Но, как известно из школьного курса, $\sqrt{5}$ - иррациональное число. Следовательно, число a иррационально.

4. В отеле поселились приехавшие на соревнования футболисты, штангисты и журналисты, всего 100 человек. В первый же вечер сфотографировались каждая пара футболистов, каждая пара штангистов и каждая пара журналистов. На следующий день каждый журналист сфотографировался с каждым из спортсменов. На третий день каждый журналист снова сфотографировался с каждым из футболистов. Всего за эти три дня было сделано 5021 фотографий. Сколько футболистов поселилось в этом отеле?

Ответ: 14.

Решение: Пусть Φ - число футболистов, Π - число штангистов и $\mathcal{Ж}$ - число журналистов:

$$\Phi + \Pi + \mathcal{Ж} = 100. \quad (2)$$

Если бы каждая пара человек один раз сфотографировалась, то всего получилось бы

$$\frac{100 \cdot 99}{2} = 4950$$

фотографий. Разница между этим числом и числом 5021 сделанных в действительности фотографий происходит оттого, что вместо $\mathcal{Ж} \cdot \Pi$ пар журналистов-штангистов было сфотографировано ещё раз $\mathcal{Ж} \cdot \Phi$ пар футболистов-журналистов. Значит

$$\mathcal{Ж} \cdot \Pi - \mathcal{Ж} \cdot \Phi = 5021 - 4950 = 71,$$

откуда заключаем, что либо $\text{Ж} = 71$, $\text{Ш} - \Phi = 1$, либо, наоборот, $\text{Ж} = 1$, $\text{Ш} - \Phi = 71$. В обоих случаях имеем

$$\text{Ж} + \text{Ш} - \Phi = 72.$$

Вычитая это равенство из условия 2, находим, что $2\Phi = 28$, то есть футболистов было 14.

5. Три человека смотрят на башню. Каждый видит ее под своим углом (угол между направлениями на основание башни и на верхушку башни). Сумма этих углов равна 90° . Найдите самый большой из этих углов, если первый находится на расстоянии 100 метров от основания башни, второй на 200, а третий на 300.

Ответ: 45°

Решение: Обозначим эти расстояние через a_1, a_2, a_3 , а высоту башни через h . Тогда $\text{tg } \alpha_i = \frac{h}{a_i}$, поэтому $\text{tg } \alpha_2 = \frac{\text{tg } \alpha_1}{2}$, $\text{tg } \alpha_3 = \frac{\text{tg } \alpha_1}{3}$. Угол α_1 самый большой; обозначим его тангенс через x .

Так как сумма углов равна 90° , то

$$\text{tg } \alpha_1 = \text{ctg}(\alpha_2 + \alpha_3) = \frac{1 - \text{tg } \alpha_2 \text{tg } \alpha_3}{\text{tg } \alpha_2 + \text{tg } \alpha_3},$$

$$x = \frac{1 - (x/2)(x/3)}{x/2 + x/3} = \frac{6 - x^2}{5x},$$

откуда $5x^2 = 6 - x^2$, $x = 1$, $\alpha_1 = 45^\circ$.