ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

возрастная группа (11 класс)

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Максимальная оценка – 35 баллов.

ЗАДАНИЯ

Задание 1.

Сравните два числа:

$\sqrt{3}\sin 10^\circ$ и $\sin 80^\circ$.

Правильный ответ.

Второе больше.

Решение.

Рассмотрим разность первого и второго чисел:

$$\sqrt{3}\sin 10^\circ - \sin 80^\circ = \sqrt{3}\sin 10^\circ - \cos 10^\circ = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ - \frac{1}{2}\cos 10^\circ\right) =$$

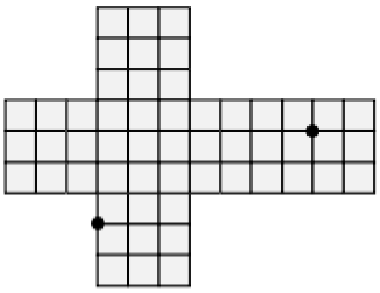
$$= 2(\cos 30^\circ \sin 10^\circ - \sin 30^\circ \cos 10^\circ) = 2\sin(10^\circ - 30^\circ) = -\sin 20^\circ < 0.$$

Оценка задания.

Верное обоснованное решение – **7 баллов**, решение неверно или только ответ – **0 баллов**.

Задание 2.

Рубик сделал развертку куба размером 3 × 3 × 3 и отметил на ней две точки (см. рисунок). Каково будет расстояние между этими точками после того, как Рубик склеит из развёртки куб.

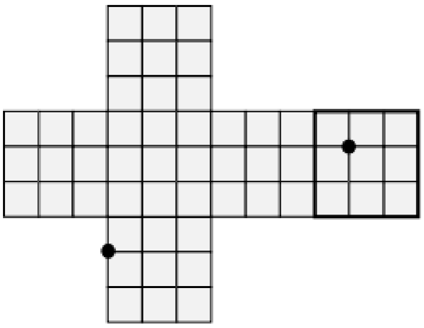
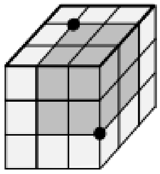


Правильный ответ.

$2\sqrt{3}$.

Решение.

Изобразим готовый кубик (изображение выбрано так, чтобы выделенная грань развёртки оказалась сверху). Данные точки – это две противоположные вершины кубика 2 × 2 × 2. А в кубе 2 × 2 × 2 диагональ имеет длину $2\sqrt{3}$.

Замечание. Не обязательно использовать то, что точки являются концами диагонали куба. Можно просто изобразить получившуюся картинку и найти длину требуемого отрезка, применив пару раз теорему Пифагора (или методом координат и т. п.)

Оценка задания.

Верное решение (достаточно верной картинки и объяснения, как именно ищется расстояние между точками) – **7 баллов**. Картинка изображена верно (возможно не с того ракурса, что в приведённом решении), но дальше расстояние найдено неверно – **3 балла**. Приведён только верный ответ – **0 баллов**. Допущена ошибка при определении местонахождения точек на кубе – **0 баллов**.

Задание 3.

Три окружности с радиусами 1, 2, 3 попарно касаются друг друга внешним образом в трёх точках. Найдите радиус окружности, проходящей через эти три точки.

Правильный ответ.

1.

Решение.

Пусть O_1, O_2 и O_3 – центры данных окружностей, K, M, N – точки касания окружностей, причём $O_1K=O_1N=1$, $O_2K=O_2M=2$ и $O_3N=O_3M=3$. Известно, что при касании двух окружностей точка касания лежит на отрезке, соединяющем их центры. Поэтому K, M, N – точки на сторонах треугольника $O_1O_2O_3$. Заметим, что искомая окружность совпадает с окружностью, вписанной в треугольник $O_1O_2O_3$. Действительно, поскольку выполняются равенства $O_1K=O_1N$, $O_2K=O_2M$ и $O_3N=O_3M$, то точки K, M, N – точки касания вписанной окружности в треугольник $O_1O_2O_3$ с его сторонами.

Пусть r – искомый радиус, запишем площадь треугольника $O_1O_2O_3$ через периметр и r, и через формулы Герона. Получим уравнение:

$$\frac{1}{2}(3+4+5)r=\sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)}\Rightarrow 6r=6\Rightarrow r=1.$$

Оценка задания.

Верное обоснованное решение – **7 баллов**, решение неверно или только ответ – **0 баллов**.

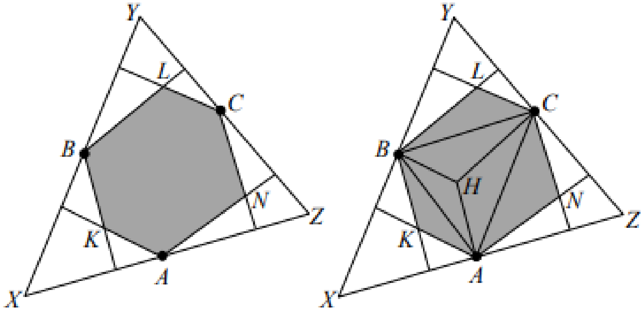
Задание 4.

Из середины каждой стороны остроугольного треугольника площади S проведены перпендикуляры к двум другим сторонам. Найдите площадь шестиугольника, ограниченного этими перпендикулярами.

Правильный ответ.

$\frac{S}{2}$.

Решение.



1. Обозначим вершины исходного треугольника буквами X, Y, Z, середины сторон – буквами A, B, C, точки пересечения перпендикуляров – K, L, N. Площадь искомого шестиугольника равна сумме площадей треугольника ABC и трёх маленьких треугольников, примыкающих к его сторонам: AKB, BLC, CNA.
2. Так как средние линии треугольника XYZ разбивают его на 4 равных треугольника, площадь треугольника ABC равна $\frac{S}{4}$.
3. Проведём в треугольнике ABC отрезки высот до точки их пересечения H. Так как средняя линия BA параллельна стороне YZ, проведённые к ним перпендикуляры CH и AN также параллельны. Рассуждая аналогично, получаем, что $AH||CN$, и, значит, $AHCN$ – параллелограмм.
4. Диагональ AC разбивает параллелограмм $AHCN$ на два равных треугольника, следовательно, площади треугольников AHC и ANC равны. Точно так же равны площади треугольников AHB и AKB и площади треугольников CHB и CLB.
5. Отсюда получаем, что искомая площадь в два раза больше площади треугольника ABC и равна $\frac{S}{2}$.
Замечание. Исходный треугольник должен быть остроугольным, чтобы все высоты проходили внутри соответствующих треугольников.
Оценка задания.
Любое полное верное решение – **7 баллов**. Равенство всех нужных фигур (и площадей) доказано, но площадь не найдена – **4 балла**. Приведено верное разбиение шестиугольника на части, но равенство фигур никак не обосновывается, а только утверждается, и получен верный ответ – **3 балла**. Ответ без обоснования – **1 балл**.

Задание 5.
На столе лежит 2021 кучка орехов, сначала в каждой кучке по одному ореху. Петя и Вася играют в следующую игру (первым ходит Петя). Каждым ходом можно объединить три кучки, в которых поровну орехов. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре, и как ему играть?

Правильный ответ.
Петя.
Решение.
Заметим, что в конце игры количество орехов в каждой кучке будет равно степени тройки, причём кучек каждого вида будет не более двух. Такое разложение единственно, и количество кучек из 3s орехов обязательно будет равно соответствующей цифре в разложении 2021 в троичной системе счисления. Так как 2021 = 2□36+2□35+2□33+2□32+3+2□1, то в конце получится 11 кучек. За каждый ход исчезают ровно две кучки, следовательно, количество ходов равняется (2021–11):2=1005 вне

зависимости от способа объединения кучек. Таким образом, последний ход всегда будет делать Петя, он и выиграет.

Оценка задания.

Верное решение – 7 баллов.

Если решение неполное, то рассматриваем критерии: указано, что в каждой кучке число орехов равно степени тройки – 1 балл; указано, что кучек каждого вида будет не более двух – 1 балл; указано разложение 2021 в троичной системе – 1 балл; найдено количество кучек в конце игры – 1 балл; указано, что за каждый ход исчезают ровно две кучки – 1 балл; вычислено число ходов – 1 балл. Баллы суммируются (не более 6 баллов).