

7 класс

Общие замечания. Если решение участника значительно отличается от приведенного здесь, требуется применить общие критерии проверки (в предисловии к данному сборнику). Если решение в целом верное – не менее 5 баллов, в том числе 5 за существенный недочет и 6 за менее существенный. Если в целом задача не решена – не более 3 баллов. Если к какой-либо задаче приведен неполный перечень критериев по баллам – также используются общие критерии.

1. Найдутся ли пять натуральных чисел, сумма которых равна 2026, а суммы цифр каждого из которых одинаковы?

Ответ: да

Решение. Например: $1001+1001+11+11+2=1001+1001+20+2+2$.

Критерии. Ответ «нет, не найдутся» - 0 баллов;

Ответ «да, найдётся» без примера и без обоснования – 0 баллов;

Любой правильный пример – 7 баллов.

Рекомендации к проверке. Просьба проверять правильность ответов.

2. Ближе к концу четверти ученик Анатолий насчитал в своём дневнике одинаковое количество оценок «5», «4» и «3». Решив, что можно исправить несколько троек, подготовился и пересдал несколько из них на «4» (в дневнике вместо оценки «3» поставлены «4»). Новых оценок до конца четверти не появилось. В конце четверти количество оценок «3» и «5» вместе взятых оказалось 13, а оценок «4» и «5» вместе взятых – 23. Сколько всего оценок было к концу четверти?

Ответ: 27 оценок.

Решение: Рассмотрим изменение количества разных оценок после пересдачи и заметим, что общее количество оценок не поменялось. Во множестве оценок «3» и «5» некоторое количество перешло во множество оценок «4» и «5» (суммы оценок изменились). Следовательно, в сумме количеств оценок «3» и «5» и оценок «4» и «5» количество оценок «5» присутствует дважды, а сумма количеств новых оценок «3» и «4» не отличается от суммы первоначальных. Значит, в такой сумме в 4 раза больше оценок, чем оценок «5». Откуда $(13+23)/4=9$ оценок «5», а всего первоначально было $3 \cdot 9=27$ оценок.

Решение 2. Решим задачу с помощью системы уравнений. Выберем, например, неизвестные: x – количество оценок «5», y – количество исправленных оценок «3». Тогда, количество оценок «3» после пересдачи

стало $(x - y)$, а количество оценок «4» соответственно $(x + y)$. Система уравнений выглядит так:

$$\begin{cases} x + (x - y) = 13, \\ ((x + y) + x = 23. \end{cases}$$

Решая (возможно, разными способами), получим $x = 9$, $y = 5$. Откуда, количество оценок в журнале $3x = 3 \cdot 9 = 27$.

Критерии. Представлен неверный ответ, без обоснования – 0 баллов;
Представлен верный ответ, без обоснования или обоснование неверное – 1 балл;

Верно найден ответ, есть несущественные ошибки в обосновании – 4-5 баллов;

При верном решении вместо ответа о количестве всех оценок представлен ответ о количестве оценок «5» (или «4» или «3») – снижаем на 1 балл;

Верно найден ответ, решение обосновано – 7 баллов.

3. Мама хочет приготовить торт из разноцветных коржей. Есть 5 коржей разного цвета: шоколадный, красный, медовый, зеленый, фиолетовый. Торт можно приготовить из всех пяти коржей, идущих в каком-то порядке снизу вверх. Сколькими способами можно приготовить торт, если красный корж может лежать только вторым или третьим по счёту сверху?

Ответ: 48 способов.

Решение: Рассмотрим все способы расположения всех коржей без красного: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ способа, затем двумя способами расположить красный корж (на 2-е или 3-е место по счёту), потому количество способов удвоится.

Второе решение. Рассмотрим количество способов составить торт из коржей в случае, если красный корж будет идти вторым: по правилу произведения $4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ варианта. Теперь, если красный корж будет идти третьим: $4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ варианта. Варианты в первом и во втором случае разные – общее количество всех вариантов $24 + 24 = 48$ вариантов.

Критерии. Представлен неверный ответ, без обоснования – 0 баллов;
Представлен верный ответ, без обоснования или обоснование неверное – 1-2 балла;

Верно найдено количество способов составления торта для одного случая расположения красного коржа (для 2-го или 3-го места) – 3 балла;

Верно найден ответ, есть несущественные ошибки в обосновании – 4-5 баллов;

Верно найден ответ, решение обосновано – 7 баллов.

4. На доске написано 35 букв Э, 40 букв Ю, 45 букв Я. Разрешается стереть две разные буквы и написать третью. Такая операция проводится до тех пор, пока это возможно. Можно ли точно определить, какие две буквы были стёрты последними? Обоснуйте ответ.

Ответ: последними будут однозначно стёрты буквы Э и Я.

Решение: Заметим, что при достаточном количестве букв стирание двух и добавление третьей приводит к смене чётности количеств всех трёх букв, причём две буквы будут одной чётности и третья – другой. Также, за одну операцию суммарно уменьшается количество всех букв на одну и меняется её чётность. Тогда, если рассмотреть последнюю возможную операцию, то заметим, что на доске после этой операции должно остаться одна или несколько одинаковых букв. Но тогда останется та буква из трёх, чётность количества которой отличается от чётности количества двух других. Такая буква – Э, следовательно, стёрты последними будут буквы Э и Я. Возможно, при доказательстве использовано понятие «инвариант»(или полуинвариант) – в решении требовать обоснование его использования(доказательство инвариантности при различных операциях стирания пар букв и дописывания третьей).

Критерии. Представлен неверный ответ, без обоснования – 0 баллов; Представлен верный ответ, без обоснования (например, приведён частный пример ходов или опирается на них) или обоснование неверное – 0 баллов; В решении учащимся замечен инвариант или изменение чётности числа разных букв после каждого хода (операции стирания пары букв и дописывания третьей), далее обоснование отсутствует или неверно – 2 балла; Верно найден ответ, есть несущественные ошибки в обосновании – 5-6 баллов;

Верно найден ответ, решение полностью обосновано – 7 баллов.

Рекомендации к проверке. Если в работе идёт перебор последовательностей вариантов ходов(особенно с пометками «правильные», «выгодные», «очевидные»), просьба критично подходить к их оценке. Чаще всего это опора на частные случаи и потеря общности, что ведёт к неполному обоснованию.

5. В Тридесятom царстве дороги соединяют города и сёла между собой. При этом каждый город связан дорогами ровно с 5 другими городами и ровно с 10 сёлами, а каждое село – с 9 городами и 6 другими сёлами. Чего в царстве больше – городов или сёл? Обоснуйте ответ.

Ответ: сёл больше, чем городов.

Решение: Рассмотрим все дороги, соединяющие только города с сёлами. Выберем из них только по одной, соединяющие каждые два конкретных населённых пункта (уберём лишние маршруты – они не влияют на связность). Посчитаем количество таких дорог двумя способами: с одной стороны, таких дорог $10 \cdot \Gamma$, где Γ – количество всех городов, а с другой, $9 \cdot C$, где C – количество всех сёл. Отсюда, $10 \cdot \Gamma = 9 \cdot C$, а значит, городов меньше, чем сёл.

Решение второе. Рассмотрен двудольный граф, вершины-города в одной доле, вершины-сёла – в другой, ребра графа – дороги. Рассмотрим только рёбра графа, соединяющие вершины-города с вершинами-сёлами (если есть кратные – удаляем). Подсчитаем количество всех таких рёбер двумя способами – относительно городов $10 \cdot \Gamma$, где Γ – количество всех городов, и относительно сёл $9 \cdot C$, где C – количество всех сёл. Отсюда, $10 \cdot \Gamma = 9 \cdot C$, а значит $\Gamma = 0,9 \cdot C$, т.е. городов меньше, чем сёл.

Критерии. Любой ответ без обоснования – 0 баллов; Представлен верный ответ, обоснование неверное (например, приведён частный пример расположения дорог, количества городов или сёл или опирается на такие случаи) – 0 баллов;

В решении замечено, что соотношение количества городов и сёл зависит только от количества дорог между ними (город-село, без повторных), далее обоснование отсутствует или неверно – 1 балл;

Верно найден ответ, есть несущественные ошибки в обосновании – 5-6 баллов;

Верно найден ответ, решение полностью обосновано – 7 баллов.

Рекомендации к проверке. Если в решении идёт перебор возможных связностей городов и сёл с помощью дорог, просьба критично подходить к их оценке. Чаще всего, это опора на частные случаи и потеря общности, что ведёт к неполному (неверному) обоснованию. Требуется оценка количества городов и сёл в общем случае. Оценка на частном случае – 0 баллов.

6. На острове Логичный живут ровно 100 жителей, причём каждый из них либо рыцарь, либо лжец и все знают об этом. Рыцарь всегда говорит правду, лжец всегда говорит ложь. Однажды на остров прибыл путешественник, который захотел узнать, сколько рыцарей среди его жителей. Он собрал всех жителей острова вместе и выслушал каждого по очереди. Первый сказал «Среди нас ровно один рыцарь», второй — «Количество рыцарей среди нас делится на 1», третий — «Среди нас ровно два рыцаря», четвертый — «Количество рыцарей среди нас делится на 2», ..., 99-ый — «Среди нас ровно 50 рыцарей», 100-ый — «Количество рыцарей среди нас делится на 50». Сколько рыцарей могло быть среди жителей?

Ответ: 3 или 4.

Решение. Хотя бы один рыцарь среди жителей есть (второй сказал правду). Среди фраз «среди нас ровно n рыцарей» - не более одной верной. Пусть количество рыцарей N . Оценим количество правдивых/ложных фраз относительно делимости количества рыцарей. Заметим, что любой собственный делитель числа N не превосходит $N/2$. Значит, у числа N количество делителей не превосходит $N/2 + 1$, то есть правдивых фраз не более $N/2 + 2$. Количество правдивых фраз совпадает с числом N (количество рыцарей). Значит, $N/2 + 2 \geq N$, откуда $N \leq 4$. Переберём все возможные случаи.

Одного рыцаря быть не может, поскольку первые два утверждения будут истинны. Двух рыцарей быть не может, поскольку утверждения 2, 3 и 4 будут истинны. Три рыцаря могут быть, так как верны утверждения 2, 5, 6. Четыре рыцаря могут быть, так как верны утверждения 2, 4, 7 и 8. Итого, 3 или 4.

Критерии.

Следующие продвижения в работе суммируются:

В решении замечено и обосновано, что количество рыцарей не менее одного, далее обоснование отсутствует или неверно – 1 балл;

Сделана верная оценка максимального количества рыцарей ($N \leq 4$) – 2 балла;

Сделан полный разбор возможных случаев количества рыцарей (в том числе, с помощью оценки) – 3 балла;

Рекомендации к проверке. Возможно, при решении фразы «Среди нас» будет рассмотрена с учётом включения самого путешественника – учесть, что сам путешественник не рыцарь и не лжец, потому внимательно проверить все дальнейшие логические выкладки.

Решение предполагает перебор возможных вариантов количеств рыцарей или лжецов – требуется внимательно проверить все логические выкладки на соответствие друг другу.