

Всероссийская олимпиада школьников по математике
муниципальный этап в 2024-2025 учебном году

Критерии и методика оценивания

7 класс

1. В шестизначном числе пронумеровали слева направо все цифры числами от 1 до 6, после чего все цифры с чётными номерами в том же порядке переставили на первые три места, а все цифры с нечётными номерами в том же порядке переставили на последние три места. Получившееся число совпало с исходным. Какое наибольшее количество различных цифр может быть в таком числе?

Ответ. 2.

Решение. Обозначим это шестизначное число через $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$. Тогда по условию оно совпадает с числом $\overline{a_2a_4a_6a_1a_3a_5}$. Значит, $a_1 = a_2 = a_4$ и $a_3 = a_6 = a_5$. Таким образом, различных цифр не более двух. В качестве примера числа с двумя различными цифрами подойдёт число 112122.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Доказано, что различных цифр не больше двух – 5 баллов.

Приведен пример числа с двумя различными цифрами – 2 балла.

2. Найдите наименьшее число, начинающееся с цифр 1234567 и делящееся на 225.

Ответ. 1234567125.

Решение. Искомое число должно делиться на 9 и на 25, то есть оканчиваться на 00 или на 25 или на 50 или на 75, и сумма цифр числа должна делиться на 9. У числа 1234567 сумма цифр дает остаток 1 при делении на 9, то есть нам нужно приписать справа такие цифры, чтобы они давали число, делящееся на 25 и с суммой цифр, дающей остаток 8 при делении на 9. Наименьшее такое число – это 125 (дописать одну или две цифры при данных ограничениях невозможно). Значит, искомое число равно 1234567125.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 3 балла.

3. В банке можно положить вклад на месяц под фиксированный процент. В конце месяца банк начислит проценты, а потом округлит (по обычным правилам) начисленную сумму до целого числа рублей. У Васи и Пети одинаковые суммы денег. Вася разделил свои деньги на две равные части и открыл два вклада, а Петя положил все свои деньги на один вклад. Может ли оказаться, что после выплаты процентов сумма у Васи будет меньше суммы у Пети?

Ответ. Может.

Решение. Пусть после начисления процентов у Васи на каждом из вкладов начислилось (с процентами) 1000,4 рублей, тогда после округления на каждом из двух его вкладов окажется 1000 рублей, то есть всего у Васи будет 2000 рублей. У Пети должна начислиться сумма $2 \cdot 1000,4 = 2000,8$ рублей. После округления у него будет 2001 рубль.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

4. За круглый стол сели семь математиков. Каждому из них дали карточку, на которой написано число «1» или «-1». Затем на доску записали семь чисел – произведения чисел на карточках каждых двух математиков, сидящих рядом. После этого на доску записали восьмое число – произведение всех семи чисел на карточках математиков. Какое наименьшее значение может принимать сумма 8 выписанных на доске чисел?

Ответ. -6.

Решение. На доске будут записаны числа 1 или -1. Нам нужно найти наибольшее возможное количество чисел -1 на доске. Заметим, что у каких-то двух сидящих рядом математиков на карточках будут одинаковые числа (иначе числа 1 и -1 чередовались бы по кругу, но это невозможно, так как 7 – нечётное число). Поэтому максимальное количество чисел -1 на доске будет 7 (а наименьшая возможная сумма – это -6).

Покажем, что это возможно. Пусть у математиков (по кругу) будут карточки 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1. Так как произведение этих 7 чисел равно -1, на доске будут выписаны 7 чисел -1 и одно число 1.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Доказано, что сумма не меньше -6 – 5 баллов.

Приведен пример для суммы -6 – 2 балла.

5. На острове живут рыцари и лжецы, рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. На чаепитие в зале собралось 30 человек. В процессе беседы десять из них сказали, что в зале ровно 20 рыцарей. Пятеро сказали, что в зале не больше 7 рыцарей. Двенадцать человек сказали, что в зале ровно 10 рыцарей. А остальные трое сказали, что в зале ровно 9 рыцарей. Каждый произнес ровно одну фразу. Сколько рыцарей присутствует на чаепитии?

Ответ. 5.

Решение. Пусть в зале 10 рыцарей. Тогда те 12 человек, которые сказали, что в зале ровно 10 рыцарей, сказали правду, то есть они являются рыцарями. Получили противоречие, значит все эти 12 человек – лжецы. Но тогда рыцарей не больше чем $30 - 12 = 18$ человек. Значит те, кто сказал, что в зале 20 рыцарей – тоже лжецы. Это сказали 10 человек, значит рыцарей не больше, чем $18 - 10 = 8$. Отсюда следует, что те 3, кто сказал, что рыцарей 9 – тоже лжецы. Значит рыцарей не больше $8 - 3 = 5$. Значит, те 5 человек, кто сказал, что рыцарей не больше 7, сказали правду. Поэтому они рыцари. А так как рыцарей не больше 5, в комнате ровно 5 рыцарей.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

Ответ получен рассмотрением примера – 2 балла.