

Условия и решения задач

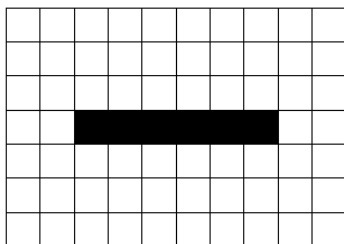
7 класс

1. Знания Арины по математике в школе оцениваются по десятибалльной системе. В течение четверти она получила несколько оценок по математике. Среднее арифметическое этих оценок равно 8. Если бы Арина получила еще 20 оценок 10, то среднее арифметическое всех баллов стало бы 9. Сколько оценок получила Арина в течение четверти?

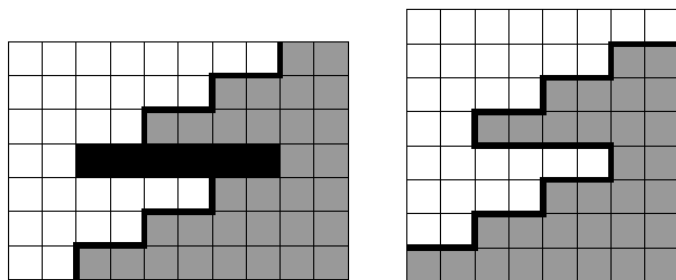
Решение. Предположим, что Арина заработала n оценок в течение четверти. Тогда она заработала $8n$ баллов. По условию, $(8n + 20 \cdot 10) = 9 \cdot (n + 20)$, откуда $n = 20$.

Ответ: 20

2. Из центра прямоугольника 7×10 вырезали прямоугольник 1×6 , см. рисунок. Разрежьте полученную фигуру на две части так, чтобы из этих частей можно было сложить квадрат. Разрезать можно только вдоль сторон маленьких квадратиков.



Ответ показан на рисунке.



3. На доске записано число 2025. За один ход можно дописать на доску одно из таких чисел:

- (а) сумму цифр некоторого написанного на доске числа;
- (б) сумму двух написанных на доске чисел;
- (в) разницу двух написанных на доске чисел.

Можно ли через несколько таких ходов записать на доске число 1?

Решение. Все числа, которые можно получить записанными на доске, будут делиться на 3. Число 1 не делится на 3. Следовательно, записать на доске число 1 нельзя.

Ответ: нельзя.

4. Все десятизначные числа, которые можно записать только цифрами 6 и 7, Олег записал в порядке возрастания. На каком месте в этом ряду стоит число 7777777766?

Решение. Всего существует $2^{10} = 1024$ десятичных чисел, которые можно записать только цифрами 6 и 7. больше указанного числа записаны только числа 7777777767, 7777777776 и 7777777777, то есть указанное число является четвертым с конца. Следовательно, это 1021-е число с самого начала.

Ответ: На 1021-ом месте.

5. Найдите несократимую дробь, которая не меняется, если числитель увеличить на 21, а знаменатель увеличить на 28.

Решение. Пусть x – числитель искомой дроби, а y – знаменатель. Поскольку по условию $\frac{x}{y}$ является несократимой дробью, то натуральные числа x и y являются взаимно простыми.

По условию одновременное увеличение числителя и знаменателя дроби на числа 21 и 28 соответственно не меняет его значения. Поэтому имеет место пропорция

$$\frac{x + 21}{y + 28} = \frac{ax}{ay},$$

где a – коэффициент пропорциональности, возникающий после соответствующих изменений числителя и знаменателя.

Итак, имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 21 = ax \\ y + 28 = ay \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a = 1 + \frac{21}{x} \\ a = 1 + \frac{28}{y} \end{cases} \Rightarrow 1 + \frac{21}{x} = 1 + \frac{28}{y} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{21}{x} = \frac{28}{y} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{3}{4}$.