Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников
по математике
2024-2025 учебный год
7 класс
Максимальный балл – 35

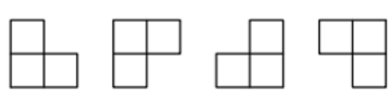
1. Был проведён онлайн турнир: 30 стримеров играли за круглым онлайн-столом. Очередной игрок добавлял в банк десять кейсов и кидал игральный кубик с натуральными числами от 2 до 7. Если общее число кейсов в банке делилось на выпавшее число, то он открывал соответствующую часть кейсов (например, пятую часть, если выпала пятёрка), иначе не открывал ничего. Известно, что последний в круге выбросил семёрку и открыл семь кейсов. Сколько всего кейсов открыли стримеры, если до первого хода в банке было 77 кейсов?
Ответ. 335 кейсов.
Решение. По условию каждым ходом в банк добавлялось 10 кейсов, поэтому всего за игру добавилось 300 кейсов. После того как последний стример выбросил семёрку, он открыл 7 кейсов. Значит, перед его ходом в банке лежало 49 кейсов из которых осталось 42, а всего было открыто $77 + 300 - 42 = 335$ кейсов.
Замечание. Раз турнир уже был проведён, то предполагается, что такое могло произойти. На самом деле пример того, как могли так пройти открытия кейсов есть, но он не простой и от учасников олимпиады приводить его не требуется.
Критерии. Полное решение – 7 баллов.
Арифметическая ошибка – снять 2 балла.

2. Заскучавший на уроке Петя решил выписывать в тетрадь числа по следующему правилу – первое из них равно 7, а каждое следующее равно сумме цифр квадрата предыдущего числа, увелченной на 1. Когда прозвенел звонок, Петя заметил, что выписал ровно 2024 числа. Какое число он выписал последним?
Ответ. 5.
Решение. Попробуем выписать члены последовательности:

$$7, 14, 17, 20, 5, 8, 11, 5, 8, 11, 5 \dots$$

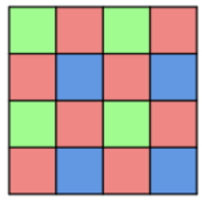
В ней, начиная с пятого члена, повторяется период $5, 8, 11$ длины 3. Так как $2024 - 4 = 2020$ при делении на 3 даёт остаток 1, то на 2024-м месте в последовательности стоит число 5.
Критерии. Полное решение – 7 баллов.
Верно найден цикл, но ошибка в подсчёте – не более 3 баллов.
Верно найден цикл без дальшейшего продвижения – 1 балл.

3. Каждую клетку квадратной таблицы 4×4 красят в любой из трёх цветов: красный, зеленый или синий. Рассмотрим все возможные расскраски такой таблицы. Какое наибольшее количество L-тримино можно выделить так, чтобы каждое L-тримино оказалось трёхцветным? (L-тримино состоят из трех единичных квадратов, как показано ниже.)



Ответ. 18.
Решение. *Оценка.* Заметим, что в каждом квадрате 2×2, мы можем выделить 4 L-тримино.

По принципу Дирихле, найдётся две клетки одного цвета среди четырех клеток квадрата 2×2, и есть два L-тримино, которые содержат обе. Поэтому каждый квадрат 2×2 содержит не более 2 L-тримино в которых 3 различных цвета. Поскольку в таблице 4×4 девять квадратов 2×2, то максимальное возможное количество L-тримино $9 \times 2 = 18$.
Пример. Один из возможных примеров на рисунке ниже



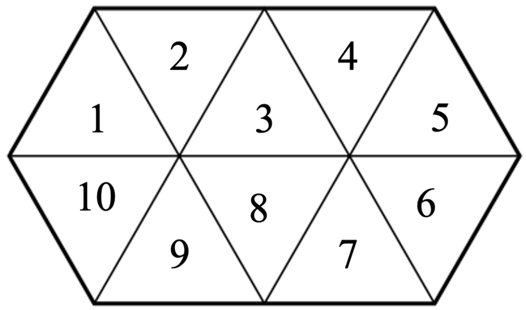
Критерии. Полное решение – 7 баллов.
Только оценка без примера – 4 балла.
Только пример без оценка – 3 балла.
Доказано, что каждый квадрат 2×2 содержит не более 2 L-тримино в которых 3 различных цвета – 2 балла.

4. Будем называть *простеньким* все нечётные простые числа, а также число 1. На острове рыцарей, которые всегда говорят правду и лжецов, которые всегда лгут в ряд стоят 2024 жителей острова. Каждый из них сказал: «Количества рыцарей справа и слева от меня отличаются на простенькое число». Сколько рыцарей может быть в этом ряду?
Ответ. $0, 2, 4, 6$ или 8 рыцарей.
Решение. Предположим, что в ряду стоит $n > 8$ рыцарей. Тогда у самого левого из них разность между числом рыцарей справа и слева от него равна $(n-1)$, у второго слева — $(n-3)$, у третьего слева — $(n-5)$. Все эти числа имеют разные остатки при делении на 3, поэтому одно из них делится на 3, и если $n > 8$, то это число больше 3, то есть не является *простеньким.* Значит, случай $n > 8$ невозможен.

Также заметим, что количество рыцарей не может быть нечётным, так как в этом случае разность между количеством рыцарей справа и слева от любого рыцаря чётна, а чётные числа не простенькие.

Покажем, что количество рыцарей могло быть любым чётным числом от 0 до 8. Действительно, поставим всех рыцарей подряд в левый конец ряда, то есть так, чтобы любой рыцарь находился левее любого лжеца. Тогда разность между количеством рыцарей справа и слева от любого рыцаря будет равняться 1, 3, 5 или 7 — все эти числа являются простенькими. А для любого лжеца эта разница чётна, то есть не простенькая.
Критерии. Полное решение – 7 баллов.
Задача состоит из трёх частей: доказательство, что $n > 8$ невозможно – 3 балла, доказательство, что количество рыцарей не может быть нечётным – 2 балла, примеры на все значения – 2 балла. Баллы суммируются.
При полном решении нет одного примера – снять 1 балл.
Нет двух и более примеров – 0 баллов за часть с примерами.
Без каких-либо доказательств приведены только примеры с обоснованием: если примеров 5 – 2 балла, если примеров от 1 до 4 – 1 балл.
Только ответ – 0 баллов.

5. Шестиугольник сделан из 10 различных треугольников (у каждого свой номер), как показано ниже. Сколько существует способов разделить шестиугольник вдоль сторон треугольников на две или более части? (Набор разрезов, не приводящий к разделению шестиугольника на части, не является способом; части одинаковые по форме, но с разными номерами — разные).



Ответ. 1949.
Решение. Каждый способ разделить шестиугольник можно описать как непустое множество ребер для разрыва, с условием, что каждая конечная точка сломанного ребра находится либо на границе шестиугольника, либо соединяется с другим сломанным ребром. Пусть центральное ребро имеет конечные точки X и Y. Рассмотрим 2 ситуации: когда центральное ребро сломано и когда нет.

Если центральное ребро сломано, то нам просто нужно сломать какое-то другое ребро, соединяющееся с X, и сломать какое-то другое ребро, соединяющееся с Y. У нас есть 2^5 вариантов для ребер, соединяющихся с X, из которых 1 не подходит (когда не сломано ни одно). Аналогично у нас есть $2^5 - 1$ допустимых вариантов для ребер, соединяющихся с Y. Это дает $(2^5 - 1)^2 = 961$ вариантов.

Если центральное ребро не сломано. Из точки X и Y выходит по 5 ребёр (без центрального), тогда всего способов провести ребро – 2^{10}. Будем вычитать варианты, которые не подходят, то есть те, когда шестиугольник не распадётся на части.
1. Не проведено ни одно ребро – 1 способ.
2. Из всех рёбер проведено только одно – 10 способов.
3. Проведено только одно из X и только одно из Y – $5 \cdot 5 = 25$ способов.
Итого получается, когда центрально ребро не сломано $2^{10} - 1 - 10 - 25 = 988$ способов.

Итого $961 + 988 = 1949$ способов.

Критерии. Полное решение – 7 баллов.
При решении конструктивно похожем на то, что написано выше, каждый забытый случай «когда не сломано ни одно ребро» – снять 1 балл. Снятие баллов суммируется за КАЖДЫЙ забытый.
Только ответ – 0 баллов.