

7 класс

Общие критерии оценивания заданий приведены в таблице:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

При оценивании заданий следует придерживаться указаний, данных в комментариях к данной задаче или к данному способу решению задачи.

Нельзя уменьшать количество баллов за то, что решение слишком длинное. Исправления в работе (зачеркивания ранее написанного текста) также не являются основанием для снятия баллов. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

7.1. Расположите в клетках квадрата 3×3 девять чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 по одному в каждой клетке так, чтобы из шести произведений трёх чисел в отдельной строке или в отдельном столбце ровно три произведения были точными квадратами.

Ответ: например так, как показано на рисунке снизу.

4	1	9	36
5	2	7	70
3	8	6	144
60	16	378	

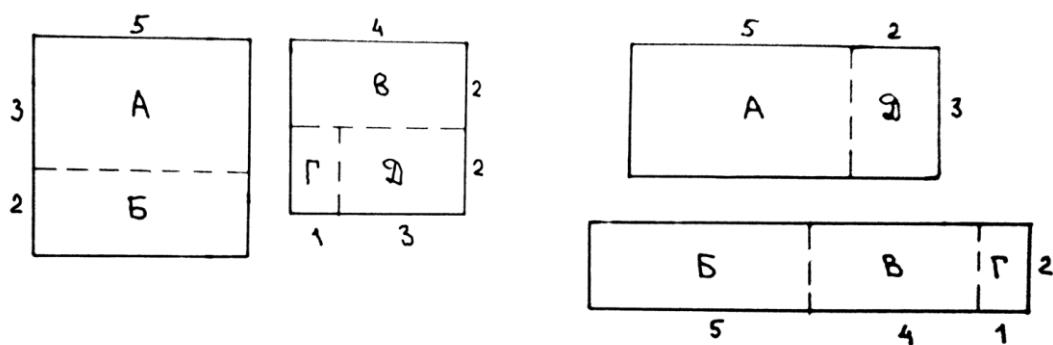
Комментарии. Приведён любой верный пример – 7 баллов.

Только верный ответ без верного примера – 0 баллов.

7.2. Можно ли разрезать квадраты 5×5 и 4×4 клеток на (общее число) пять частей по линиям клеток так, чтобы из этих пяти частей можно было сложить прямоугольники 3×7 и 10×2 клеток?

Ответ: ДА, можно.

Решение. $5^2 + 4^2 = 3 \cdot 7 + 10 \cdot 2$, $5^2 = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 2$, $4^2 = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2$, $7 \cdot 3 = 5 \cdot 3 + 2 \cdot 3$, $10 \cdot 2 = 5 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 2$.



Комментарии. Приведён любой верный пример – 7 баллов.

Только верный ответ без верного примера – 0 баллов.

7.3. Игроки А и Б по очереди (начинает А) записывают на доске одну из цифр 2, 3, 5 или 7 (цифры могут повторяться). Игра заканчивается, как только произведение всех записанных на доске чисел станет больше 2024. Выигрывает тот игрок, который записал последнюю цифру. Кто выигрывает при правильной игре? (под *правильной* игрой понимаются такие действия игроков, когда каждый действует наилучшим для себя образом, пытаясь выиграть)

Ответ: при правильной игре выиграет игрок Б.

Решение. Для победы игроку Б достаточно на первые два своих хода придерживаться следующей стратегии: если своим очередным ходом игрок А запишет цифру 2, то игрок Б записывает цифру 7; если своим очередным ходом игрок А запишет цифру 3, то игрок Б записывает цифру 5; если своим очередным ходом игрок А запишет цифру 5, то игрок Б записывает цифру 3; если своим очередным ходом игрок А запишет цифру 7, то игрок Б записывает цифру 2. Тогда после третьего хода игрока А произведение всех записанных на доске цифр будет в пределах от $14 \cdot 14 \cdot 2 = 392$ до $15 \cdot 15 \cdot 7 = 1575$, и игрок Б выигрывает, записывая своим третьим ходом цифру 7.

Комментарии. Только верный ответ – 0 баллов.

7.4. Докажите, что если a , b и c – целые числа, для которых сумма $35a^3 + 17b^3 - c^3$ делится на 18, то произведение abc делится на 6.

Доказательство. Заметим, что $35a^3 + 17b^3 - c^3 = 18 \cdot (2a^3 + b^3) - (a^3 + b^3 + c^3)$. Поэтому $35a^3 + 17b^3 - c^3$ делится на 18 тогда и только тогда, когда $a^3 + b^3 + c^3$ делится на 18. Так как $a^3 + b^3 + c^3$ делится на 18, то хотя бы оно из чисел a , b и c – чётно и, следовательно, произведение abc также чётно. Осталось показать, что произведение abc делится на 3. Если хотя бы оно из чисел a , b и c делится на 3, то и произведение abc делится на 3. Случай, когда ни одно из чисел a , b и c не делится на 3, невозможен, так как при делении на 9 куба целого и не кратного 3 числа возможны только остатки 1 или 8, но числа $1+1+1$, $8+8+8$, $1+1+8$, $1+8+8$ не делятся на 9.

Комментарии. Доказано, что произведение abc делится на 2, но делимость произведения abc на 3 не доказана – 2 балла.

7.5. На отрезке $[0; 160]$ числовой прямой отмечены красным цветом точка A и синим цветом точка B . Затем вместе с точкой A отмечены красным цветом все такие точки отрезка $[0; 160]$, которые отстоят от точки A на расстояние, кратное числу 5 . Вместе с точкой B отмечены синим цветом все такие точки отрезка $[0; 160]$, которые отстоят от точки B на расстояние, кратное числу 8 . Если все закрашенные точки попарно различны (нет точек, закрашенных в оба цвета), то всегда ли среди всех закрашенных точек найдутся две такие, расстояние между которыми не больше 1 ?

Ответ: ДА, всегда.

Решение. В промежуток между тремя последовательными синими точками (длина такого промежутка равна $8 \cdot 2 = 16 = 5 \cdot 3 + 1$) можно разметить не более 3 красных точек так, чтобы расстояние между синей и красной точками было больше 1 . Так как на отрезке $[0; 160]$ не более 10 непересекающихся промежутков длиной 16 между тремя последовательными синими точками, то в них можно разместить не более 30 красных точек так, чтобы расстояние между любой синей и любой красной точками было больше 1 . Значит, красных точек не более 30 . С другой стороны, $160 : 5 = 32$, поэтому на отрезке $[0; 160]$ будут 32 или 33 красных точки. Получили противоречие.

Комментарии. Только верный ответ – 0 баллов.