Решения заданий муниципального этапа
Всероссийской олимпиады школьников по математике
2024-2025 учебный год, 7 класс

Решение

7.1. Книги девятитомника оказались расставлены на полке в следующем порядке: 1; 5; 9; 2; 7 ; 3 ; 6; 8; 4. Требуется расставить их по порядку номеров посредством трёх перестановок, если при каждой перестановке разрешается брать два рядом стоящих тома и в том же порядке ставить их на любое новое место.

Ответ: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 - итоговая расстановка.

Решение. Книги будут расставлены по порядку номеров в результате следующих перестановок:

1; 5; 9; 2; 7; 3; 6; 8; 4 – первоначальное положение;

1; 2; 7; 3; 6; 8; 4; 5; 9 – после первой перестановки;

1; 2; 3; 6; 7; 8; 4; 5; 9 – после второй перестановки;

1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 – после третьей перестановки.

7.2. Подряд выписали все натуральные числа от 1 до 2024 без пробелов. Какая цифра стоит в записи полученного числа на 2025-ом месте?

Ответ: 1

Решение. Чтобы определить, какая цифра стоит на 2025-м месте, давайте рассмотрим структуру этой последовательности. Первые 9 мест займут однозначные числа (1-9), следующие 90 мест – двузначные числа (10-99), затем 900 мест – трехзначные числа (100-999), и так далее. Для нахождения цифры на 2025-м месте, давайте разделим 2024 на количество цифр в числах разных разрядов: Однозначные числа: 9 мест. Двузначные числа: 90 * 2 = 180 мест. Трехзначные числа: 900 * 3 = 2700 м, 2025 место находится в записи последовательности трёхзначных чисел. Остаётся найти это число. Каждые три цифры в этой записи составляют трёхзначное число. Всего таких чисел (2025 -189):3=612. Первое трёхзначное -100, второе – 101, 612-ое 100+611=711. Таким образом, последняя цифра этого числа и занимает 2025-ое место. То есть, число 1.

7.3. Разделите данную фигуру на 6 равных частей по форме и по площади, делая разрезы только по линиям сетки, двумя различными способами.

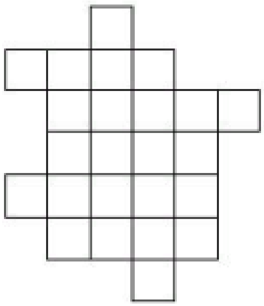

Рис. 1.

Ответ: см. рис. 2.

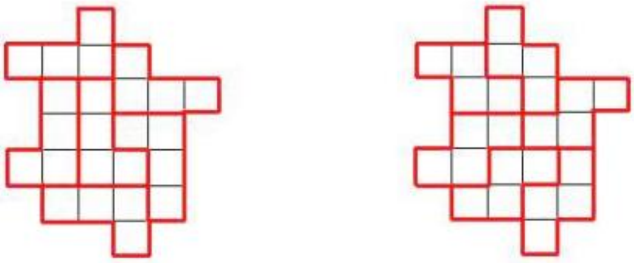

Рис. 2.

7.4. В вершинах куба записаны числа 4; 2; 0; 3; 1; 9; 5; 7. За один ход разрешается прибавить к числам, стоящим на концах ребра, одно и то же целое число. Можно ли за несколько ходов получить нули во всех вершинах?

Ответ: Получить нули во всех вершинах нельзя.

Решение. Сумма всех чисел первоначально была равна 31 (4 +2 +0 + 3 +1 +9 +5 +7 = 31). При прибавлении двух одинаковых чисел чётность суммы не изменится. А так как сумма шести нулей равна нулю – число чётное, то получить нули во всех вершинах куба нельзя.

7.5. В мешке лежат карточки с четырьмя буквами С, Т, О, Н, по одной букве на карточке. Общее количество карточек 26. Известно, что карточек с буквой Т меньше, чем с буквой О, а карточек с буквой О меньше, чем с буквой Н. Из мешка не глядя извлекают несколько карточек и из букв на извлечённых карточках составляют слова. Чтобы гарантированно можно было собрать слово «СТОН», нужно вытащить минимум 22 карточки; чтобы слово «ТОН» — 21 карточку, а чтобы слово «ОН» — 20 карточек. Сколько карточек каждого вида в мешке? Ответ обоснуйте.

Ответ: 5 букв С, 6 букв Т, 7 букв О и 8 букв Н.

Решение:

<u>Способ 1</u>. По условию существует такой набор из 21 карточки, из букв которого слово «СТОН» собрать нельзя. Но слово «ТОН» из букв этого набора собрать можно, значит, в этом наборе отсутствует буква «С». Так как при добавлении к набору её одной любой карточки получится набор, из которого слово «СТОН» уже собирается, все остальные 26 − 21 карточка содержат букву «С». Итак, карточек с буквой «С» ровно 5. Аналогично, из информации про слова «ТОН» и «ОН» находим, что карточек с буквой «Т» ровно 6. На остальные буквы приходятся 26−5−6 = 15 карточек, при этом карточек с каждой из букв «О» и «Н» больше 6. Значит, одна из этих двух букв встречается 7 раз, вторая — 8. Так как карточек с буквой «О» меньше, чем с буквой «Н», получаем единственный ответ.

<u>Способ 2</u>. Так как при извлечении 22 букв слово «СТОН» получается обязательно, то каждая буква встречается более 26 − 22 = 4 раз. Так как можно извлечь 21 карточку так, что слово «СТОН» не соберётся, какой-то из букв не больше 26−21 = 5. Это не может быть буква Н, О или Т, так как иначе может случится, что вытащив 21 карточку мы не соберём слово ТОН. Итак, в наборе ровно 5 букв С. Аналогично рассуждая, находим, что буквы Н, О и Т встречаются не менее 6 раз каждая; при этом одна из них ровно 6 раз. И это не буквы О и Н (иначе может оказаться, что на вытащенных 20 карточках одной из них не будет; не сложится набор ОН. Значит, в наборе ровно 6 букв Т. Букв О и Н в сумме 15, значит, букв О меньше половины от этого числа, то есть не более 7. Но их больше, чем букв Т, то есть больше 6. Значит, в наборе 7 букв О и 8 букв Н.