

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 7 КЛАССА

Задача 1. На числовой оси нарисовали отрезок. Найдите координаты его концов, если точки $M(3/2)$ и $N(11/4)$ делят его на три равные части.

Ответ. $1/4$ и 4 . **Решение.** Пусть точки M и N делят на три равные части отрезок AB , причем точка M лежит между A и N , точка A имеет координату x , а точка B — координату y . Тогда $3/2 - x = AM = MN = 11/4 - 3/2$, откуда $x = 1/4$. Аналогично $y - 11/4 = NB = MN = 11/4 - 3/2$, откуда $y = 4$.

• Ответ без обоснования — 3 балла. Логика решения верна, ответ неверен из-за ошибок в вычислениях — не выше 3 баллов.

Задача 2. Из вершины угла AOB провели луч OD , делящий его пополам. Оказалось, что этот луч образует с одной из сторон угла COB , смежного с AOB , угол, на 60° больший, чем COB . Какой могла быть величина угла AOB ?

Ответ. 120° или 160° . **Решение.** Пусть $\angle COB = x$. Возможны два случая: $\angle COD = 60^\circ + x$ и $\angle BOD = 60^\circ + x$. В первом случае $\angle DOB = \angle DOC - \angle COB = 60^\circ$, откуда $\angle AOB = 120^\circ$. Во втором случае $180^\circ = 2\angle DOB + \angle COB = 2(60^\circ + x) + x$, откуда $x = 20^\circ$ и $\angle AOB = 160^\circ$.

• По 2 балла за каждый из двух ответов и из 3 баллов оценивается обоснование того, что других ответов нет. Логика решения верна, ответ неверен из-за ошибок в вычислениях — не выше 4 баллов.

Задача 3. Вася расставил в клетках таблицы размером 7×7 крестики и нолики (в каждой клетке — один знак). Оказалось, что в таблице есть 6 столбцов, в каждом из которых крестиков больше, чем ноликов. Могло ли оказаться, что в этой таблице есть 6 строк, в каждой из которых ноликов больше, чем крестиков?

Ответ. Могло. **Решение.** Аналогично решению задачи 5 для 5 класса.

• Только ответ «могло» — 0 баллов. Есть верный пример или его описание — 7 баллов. Нет верного примера или его описания — 0 баллов.

Задача 4. Докажите, что $\underbrace{22\dots2}_{1012\text{цифр}} + \underbrace{(33\dots3)^2}_{1012\text{цифр}} = \underbrace{11\dots11}_{2024\text{цифры}}$.

Решение. Положим $x = \underbrace{11\dots11}_{1012\text{цифр}}$. Тогда равенство из условия можно переписать в виде $2x + 9x^2 = (10^{1012} + 1)x$. Поделив обе части полученного равенства на x , получаем $2 + 9x = 10^{1012} + 1 \Leftrightarrow 9x = 10^{1012} - 1 = \underbrace{99\dots99}_{1012\text{цифр}}$. Последнее равенство очевидно.

Задача 5. Найдите все целые числа a , большие 1 и меньшие 1000, у которых куб суммы цифр равен a^2 .

Ответ. Единственное такое число — 27. **Решение.** Разложим квадрат искомого числа a на простые множители: $a^2 = p_1^{2\alpha_1} \dots p_n^{2\alpha_n}$. Так как этот квадрат также является кубом суммы цифр числа a , все показатели степеней $2\alpha_1, \dots, 2\alpha_n$ должны делиться на

3. Значит, на 3 должны делиться и числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, то есть число $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$ само должно быть кубом натурального числа. Так как $10^3 = 1000$, достаточно проверить на выполнение условия задачи числа $2^3, \dots, 9^3$. Сделав это, находим, что из них искомым является только число $3^3 = 27$: $27^2 = (2+7)^3 = 729$.

- Только ответ — 1 балл.