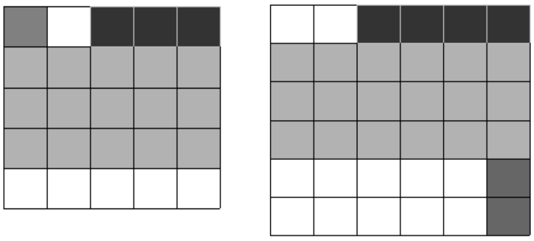
7 класс

1. Найдите наибольшее 10-тизначное число, при вычеркивании из которого любых 5 цифр получается число меньшее, чем 56789. (Достаточно написать само число, как находили ответ объяснять не нужно)
   Ответ: 5555556788.
2. Квадрат разрезали на 5, не обязательно различных, прямоугольников. Затем, у каждого прямоугольника одну сторону увеличили на 1 (например, если был прямоугольник 1х2, то он мог стать прямоугольником 2х2 или прямоугольником 1х3). Может ли оказаться так, что из всех новых прямоугольников также можно сложить квадрат? (Если может, то приведите пример, как такое могло быть, если нет, объясните, почему такого быть не может)
   Ответ: может.
   
   Решение. Например, см. рис.
3. Где-то в горах, возможно на разной высоте, расположены посёлки A, B и C. Дороги между ними идут вверх и вниз, а как именно – неизвестно (то есть, например, между посёлками A и B могут быть и подъемы, и спуски). Антон идёт из A в B 40 минут, обратно – 60 минут, а расстояние от A до B равно 5 км. Расстояние от A до C равно 3 км, и Антон идёт из A в C 35 минут. А сколько времени он идёт из C в A? (В гору Антон идет всегда с одной и той же постоянной скоростью, с горы – тоже)
   Ответ. 25 минут.
   Решение. Суммарный путь от A до B и от B до A – это 5 км вверх и 5 км вниз, и его Антон проходит за 40+60 = 100 минут. Значит, 1 км вверх и 1 км вниз он проходит за 100 : 5 = 20 минут, а 3 км вверх и 3 км вниз – за $20\cdot 3=60$ минут, что равно суммарному расстоянию от A до C и от C до A. Так как в одну сторону Антон идёт 35 минут, то на путь обратно он тратит 60 – 35 = 25 минут.
4. Из клетчатого квадрата 51х51 вырезали по линиям сетки 48 квадратиков 2х2 так, что никакой вырезанный квадратик не имеет общих точек (даже вершин) с каким либо другим вырезанным квадратиком, а так же с границей большого квадрата. Сколькими способами из получившейся фигуры можно вырезать уголок из трех клеток?
   Ответ: 8464.
   Решение. Найдем, сколькими способами из квадрата 51х51 можно вырезать уголок. Всего есть четыре различных положения уголка, и для каждого положения центральная клетка уголка может находится в любой клетке квадрата 50х50. Таким образом способов получается $4\cdot 50\cdot 50=10000$.
   Заметим, что, так как никакой вырезанный квадратик 2х2 не касается границы большого квадрата, то он “портит” 32 уголка. А так как и вырезанные квадратики 2х2 не касаются между собой, то все они “портят” разные уголки (то есть нет уголка, испорченного двумя разными квадратиками 2х2). Всего “испорченно”

уголков $32 \cdot 48 = 1536$.

Значит, осталось $10000 - 1536 = 8464$ способа вырезать уголок.

5. По кругу лежат пять одинаковых на вид монет. Известно, что среди них ровно две фальшивые, причём они лежат рядом. Настоящие монеты весят одинаково, фальшивые тоже одинаково – их вес отличается от настоящих, но неизвестно, в какую сторону. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах без гирь найти обе фальшивые монеты? (Определять, легче или тяжелее они настоящих при этом не обязательно)

   Ответ: можно.

   Решение. Пронумеруем монеты по часовой стрелке. Первым взвешиванием сравним 1+4 с 2+3.

   1) Если равенство, то фальшивыми могут быть пары 1-2 или 3-4. В любом случае монета 5 настоящая, и достаточно сравнить её с любой из остальных монет.

   2) Если неравенство, например 1+4 тяжелей, то фальшивыми могут быть пары 2-3 (лёгкие), 4-5 (тяжёлые) или 5-1 (тяжёлые). Вторым взвешиванием сравним 1 с 4. Если равенство, то фальшивая пара 2-3, иначе та, где более тяжёлая монета.