

Ленинградская область
Всероссийская олимпиада школьников по математике
Муниципальный этап
2024-2025 уч.год
7 класс
Решения и ответы

1. Имеются три мешка Деда Мороза, на каждом написана одна фраза. На красном мешке написано "В других мешках подарка нет". На голубом мешке написано "Подарок не в этом мешке". На золотистом мешке написано "Подарок не в красном мешке". В каком мешке находится подарок, если известно, что из написанных фраз ровно одна верная?

Решение. Переберем три варианта.

Если верна фраза, написанная на красном мешке, "В других мешках подарка нет", то подарок лежит в этом мешке, и фраза, написанная на голубом мешке, становится верной. Получили две верных фразы. Этот вариант не подходит.

Пусть верна фраза, написанная на голубом мешке, "Подарок не в этом мешке". Предположим, что подарок лежит в красном мешке. Фраза, написанная на красном мешке, будет верной. Противоречие. Если положить подарок в золотистый мешок, то фраза, написанная на нем, станет верной. Итак, вариант, при котором верной является фраза, написанная на голубом мешке, не подходит.

Пусть верна фраза, написанная на золотистом мешке, "Подарок не в красном мешке". Пусть подарок находится в голубом мешке. Фразы, написанные на красном и на голубом мешках, в таком случае будут неверными. Этот вариант нам подходит. Пусть подарок находится в золотистом мешке. Фраза, написанная на голубом мешке, станет верной. Этот вариант не подходит.

Итак, мы получили один подходящий вариант: подарок в голубом мешке.

Задачу можно решить, по очереди перебирая варианты расположения подарка в трех мешках.

Ответ. Подарок находится в голубом мешке.

2. В клетках прямоугольной таблицы 10×10 написаны числа, каждые два из которых различны. В каждой клетке, не лежащей на краю таблицы, стоит число, равное среднему арифметическому соседних чисел. Докажите, что самое большое число стоит на краю таблицы.

Решение. Если самое большое число стоит не на краю таблицы, то оно окружено четырьмя разными числами. Так как оно является средним арифметическим, то среди этих четырех чисел найдется число, его превосходящее. (Среднее арифметическое неравных чисел меньше наибольшего числа в наборе). Противоречие.

3. В группе семь учеников. Каждому из них учительница задала задачу: найти одно двузначное число, при прибавлении к которому числа 27 получалось бы число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Может ли так оказаться, что каждый из учеников нашел свое, отличное от других, двузначное число?

Решение. Ученики должны решить уравнение

$$10a + b + 27 = 10b + a$$

Здесь a и b – это цифры, целые числа от 1 до 9. Первые цифры двузначного числа не могут быть 0. Получаем

$$9a + 27 = 9b$$

$$a + 3 = b$$

Это уравнение имеет шесть пар решений:

$$a = 1, b = 4; a = 2, b = 5; a = 3, b = 6; a = 4, b = 7; a = 5, b = 8; a = 6, b = 9$$

Так как заданных двузначных чисел всего шесть, то какие-то два ученика найдут совпадающие числа.

Ответ. Так получиться не могло, какие-то два ученика найдут совпадающие числа.

4. Вдоль дороги растут 8 яблонь. Число яблок на соседних яблонях отличается на 1. Может ли на всех 8 яблонях вместе быть 125 яблок?

Решение. Количество яблок на соседних деревьях отличается на 1, значит, это числа разной четности. У нас есть восемь чисел – количество яблок на каждой яблоне. Из этих восьми чисел четыре числа четные и четыре числа нечетные. Сумма четырех нечетных чисел – число четное. Общее число яблок на яблонях получается четным. Оно не может равняться 125.

Ответ. Число яблок на восьми яблонях вместе не может равняться 125.

5. Шесть борцов из города "Южный" и шесть борцов из города "Восточный" провели турнир, в результате которого каждый занял свое место в турнирной таблице, с первого по двенадцатое. Докажите, что число мест в диапазоне с 1 по 6, которое заняли борцы из города "Южный", совпадает с числом мест в диапазоне с 7 по 12, которое заняли борцы из города "Восточный".

Решение. Пусть число борцов из города "Южный", которые заняли места с 1 по 6, равно k (очевидно, $0 \leq k \leq 6$). Тогда в этом диапазоне борцы из города "Восточный" заняли оставшиеся места, т.е. $6 - k$ мест. Всего было 6 борцов из этого города. Остальные k борцов из города "Восточный" заняли места с 7 по 12.

6. Про натуральные числа m и n известно, что

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2024}$$

- а) Докажите, что оба эти числа не могут одновременно быть нечетными.
б) Приведите один пример таких чисел.

Решение. Условие задачи можно переписать так:

$$2024m + 2024n = mn$$

- а) Слева стоит четное число, значит, справа тоже четное число. Произведение двух нечетных чисел нечетно, поэтому оба числа m и n не могут быть нечетными.
- б) Преобразуем полученное выражение и разложим его на множители.

$$mn - 2024m - 2024n = 0$$

$$mn - 2024m - 2024n + 2024 \cdot 2024 = 2024 \cdot 2024$$

$$(m - 2024)(n - 2024) = 2024 \cdot 2024$$

Далее нетрудно подобрать какое-нибудь решение. Воспользуемся разложением 2024 на множители. Например, $2024 = 8 \cdot 253$. Тогда подойдут $m = 2032$ и $n = 2277$.

Ответ. Один из примеров $m = 2032$ и $n = 2277$.

Продолжительность выполнения заданий – 235 минут. Максимальное количество баллов за каждую задачу – 7 баллов. Итого 42 балла за все задание.