

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 7 КЛАССА.

7.1. Али-Баба нашёл в пещере 7 сундуков с бриллиантами. Забирая бриллианты из сундуков по очереди, он заметил, что в каждом следующем сундуке было на 1 бриллиант больше, чем в предыдущем. Всего в сундуках было 2023 бриллианта. Сколько бриллиантов было в последнем сундуке?

Ответ. 292.

Решение.

Пусть в первом в сундуке было x бриллиантов. Тогда во втором сундуке было $(x + 1)$ бриллиантов, в третьем — $(x + 2)$ бриллиантов, в четвертом — $(x + 3)$ бриллиантов, в пятом — $(x + 4)$ бриллиантов, в шестом — $(x + 5)$ бриллиантов, в седьмом — $(x + 6)$ бриллиантов. Тогда всего в сундуках было $(7x + 21)$ бриллиантов. Откуда, $7x + 21 = 2023$, следовательно, $x = 286$. Получаем, что в последнем сундуке было $286 + 6 = 292$ бриллианта.

7.2. Перед началом учебного года у входа в школу собрались 8 мальчиков и 7 девочек. Каждый мальчик поздоровался с 5 девочками, а каждая девочка, кроме Тани - с 6 мальчиками. Со сколькими мальчиками поздоровалась Таня?

Ответ. 4.

Решение.

Всего приветствий между мальчиками и девочками было $8 \cdot 5 = 40$. Все девочки кроме Тани в количестве $7 - 1 = 6$ человек сделали $6 \cdot 6 = 36$ приветствий. Значит, Таня поздоровалась с $40 - 36 = 4$ мальчиками.

7.3. Алина выбрала три различные цифры и записала на доске всевозможные различные трехзначные натуральные числа, составленные из выбранных цифр (в записи этих чисел все цифры различны). Сложив все числа, Алина получила сумму 3587. Затем Алина стерла числа с доски и предложила Полине по сумме чисел выяснить, какие цифры были выбраны. Сможет ли Полина это сделать?

Ответ. Да, сможет. 8,9,0.

Решение.

Пусть были выбраны цифры a, b, c и среди них нет нуля. Тогда Алина могла составить шесть различных трехзначных чисел $\overline{abc}, \overline{acb}, \overline{bac}, \overline{bca}, \overline{cab}, \overline{cba}$. Легко заметить, что сумма этих чисел составляет $222(a + b + c)$. Но 3587 не делится на 222 без остатка, а это значит, что среди выбранных Алиной цифр обязательно есть 0.

Тогда Алина могла составить только 4 различных числа $\overline{a0b}, \overline{b0a}, \overline{ab0}, \overline{ba0}$. Их сумма равна

$211(a + b) = 3587$. Откуда $a + b = 17$. Так как 17 можно получить только сложив 8+9 то это значит, что Полина сможет однозначно определить, какие из цифр выбрала Алина. Это цифры 8,9 и 0.

7.4. Можно ли разрезать доску 2023×2024 на прямоугольники 7×14 ?

Ответ. Нельзя.

Решение.

Предположим, что мы смогли разрезать доску 2023×2024 на прямоугольники 7×14 . Тогда

площадь доски нацело делится на площадь прямоугольника 7×14 . Но $2023 \cdot 2024$ не делится на $7 \cdot 14$. Следовательно, наше предположение неверно.

7.5. По кругу стоят 600 рыцарей и лжецов (рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут). Оказалось, что рядом с каждым лжецом стоит ровно один лжец. На вопрос каждому стоящему «Сколько среди ваших двух соседей лжецов?» **не** прозвучало ответа «0».

а) (3 балла) Какое наибольшее число лжецов могло находиться на круге?

б) (4 балла) Какое наименьшее число лжецов могло находиться на круге?

Баллы за пункты суммируются.

Ответ. а) 400, б) 300.

Решение.

а) разобьем круг на 200 подряд идущих троек людей. В каждой такой тройке не более двух лжецов. Действительно, если лжецов трое, то у среднего из них два соседа-лжеца – противоречие. Тогда в каждой выделенной тройке ≤ 2 лжецов, а всего их $\leq 2 \cdot 200 = 400$. Оценка достигается при расстановке РЛРЛРЛРЛЛ... Легко проверить, что условие выполняется.

б) разобьем круг на 150 подряд идущих четверок людей. В каждой такой четверке хотя бы два лжеца. Действительно, если лжецов меньше, то их либо 0, и четверка выглядит как РРРР, но тогда средние два рыцаря ответили «0». Аналогично, если лжец в четверке один и стоит на ее краю (например, с левого): ЛРРР – один из рыцарей сказал «0». Если же единственный лжец стоит в центре, то РЛРР – у него ноль соседей-лжецов, а должен быть ровно один, противоречие. Тогда в каждой выделенной четверке ≥ 2 лжеца, а всего их

$\geq 2 \cdot 150 = 300$. Оценка достигается при расстановке РРЛРРЛРЛЛ... Легко проверить, что условие выполняется.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕРКЕ И ОЦЕНКЕ.

7.1. Дополнительные критериев нет.

7.2. Замечено количество приветствий между мальчиками и девочками – 2 балла.

7.3. Замечено, что нуля НЕ быть среди задуманных цифр не может – 3 балла. Подобраны цифры, но полного доказательства нет – 2 балла.

7.4. Дополнительные критериев нет.

7.5. а) Полное решение пункта а) – 3 балла. Доказана только оценка – 2 балла. Приведен только пример (спояснением) – 1 балл.

б) Полное решение пункта б) – 4 балла. Доказана только оценка – 3 балла. Приведен только пример (спояснением) – 1 балл.

оба) Только ответ / ответ + пример без пояснения – баллы не добавляются.