

7 класс

1. Можно ли разрезать квадрат на 2024 квадратов (не обязательно равных между собой)?

Ответ: можно.

Решение. а) Разрежем квадрат на 4 равных квадрата, затем разрежем на 4 равных квадрата один из полученных квадратов (рис. 1). Один квадрат исчез, четыре появились, и квадратов стало на $4 - 1 = 3$ больше.

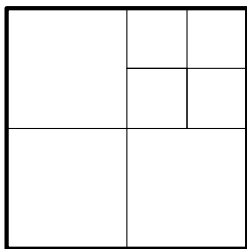


Рис. 1

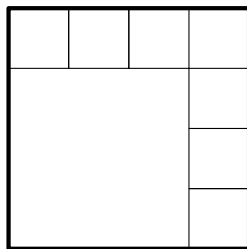


Рис. 2

б) Отрежем от квадрата «уголок» шириной в $1/4$ стороны квадрата и разделим его на 7 равных квадратиков (рис. 2). Восьмой квадрат со стороной $3/4$ — то, что осталось после отрезания «уголка».

в) Так как $2024 = 8 + 2016 = 8 + 3 \cdot 672$, можно сначала разрезать квадрат на 8 квадратов, а затем 672 раза проделать описанную выше процедуру увеличения числа квадратов на 3.

Задача допускает и другие решения.

Критерии оценки.

- 1) Правильный ответ без объяснения оценивается в 0 баллов.
 - 2) Если в решении представлен только рисунок, но нет подсчета количества квадратиков и их размеров — не более 4 баллов.
2. Петя написал на доске пример на умножение и зашифровал его, заменив каждую цифру буквой: одинаковые цифры — одинаковыми буквами, разные — разными. В итоге получилось равенство $ab \times vg = ddee$. Докажите, что Петя где-то ошибся.

Решение. Оба сомножителя в левой части не делятся на 11. Так как число 11 — простое, не делится на 11 и их произведение. Поэтому оно не может равняться числу $11d$, которое делится на 11.

Критерии оценки.

- 1) Не доказано, что число $11d$ делится на 11 — минус один балл.
- 2) Если в решении нет ссылки на простоту числа 11 — минус 1 балл
3. Имеется 4 палочки длиной по 1 см, 4 палочки по 2 см, 6 палочек по 3 см и 5 палочек по 4 см. Можно ли, используя все эти палочки, сложить
 - а) какой-нибудь прямоугольник;
 - б) прямоугольник, у которого одна сторона вдвое длиннее другой;
 - в) прямоугольник, у которого одна сторона вчетверо длиннее другой;
 - г) квадрат?

Ответ: а), в) — можно. б), г) — нельзя.

Решение. а, в) Вот один из многих способов: две стороны длины 5 — $3 + 2$ и $4 + 1$ и две стороны длины 20: $2 \times 2 + 4 \times 4$ и $1 \times 3 + 2 + 3 \times 5$.

б, г) Если одна из сторон равна a , а другая — $2a$, то периметр прямоугольника равен $6a$, а суммарная длина палочек, равная 50, на 6 не делится. Та же история с квадратом: если его сторона равна a , то периметр равен $4a$, и 50 не делится и на 4.

Критерии оценки.

- 1) Приведён правильный пример в п. а) — 1 балл.
- 2) Приведён правильный пример в п. в) — 2 балла.
- 3) Доказана невозможность примера в одном из п. б) или г) — 2 балла.
- 4) Доказана невозможность примера в пп. б) и г) — 4 балла.
4. На дороге между горными селениями А и Б нет горизонтальных участков. Машина без остановок проехала по ней от А до Б и вернулась обратно, потратив на весь путь 6 часов. При этом в гору она всегда ехала

со скоростью 15 км/ч, а под гору — со скоростью 30 км/ч. Чему равна длина дороги?

Ответ: 60 км.

Решение. Поскольку ровных участков на дороге нет, а каждый участок дороги машина проехала два раза в разных направлениях, в гору она суммарно проехала то же расстояние, что и под гору. Так как в гору машина ехала вдвое медленнее, чем под гору, она потратила на езду в гору вдвое больше времени, чем на езду под гору. Деля 6 часов в отношении 2 : 1, получаем, что в гору машина ехала 4 часа, а под гору — 2 часа, а длина дороги равняется $(4 \cdot 15 + 2 \cdot 30) / 2 = 60$ км. Решение можно завершить и алгебраически, обозначив длину дороги через x и решив уравнение $x/15 + x/30 = 6$.

Критерии оценки.

- 1) Приведён правильный ответ без обоснования — 0 баллов.
 - 2) Ход решения правильный, но имеются ошибки в вычислениях или решении уравнений — не более 4 баллов.
 - 3) Если решение опирается на то, что дорога в одном направлении все время идет в гору – не более 4 баллов.
5. Среди 100 отдыхающих провели анкету. Оказалось, что 95 из них были в Москве, 85 — в Санкт-Петербурге, 75 — в Сочи и 65 — в Калининграде. Докажите, что не менее 20 из них побывали во всех четырёх городах.

Решение. Переформулируем условие: из 100 отдыхающих не были в Москве 5 человек, в Санкт-Петербурге — 15, в Сочи — 25, в Калининграде — 35. Значит, всего хотя бы в одном из этих городов не были, самое большее, $5 + 15 + 25 + 35 = 80$ человек. Следовательно, во всех четырёх городах были, самое меньшее, $100 - 80 = 20$ человек.

Критерии оценки.

- 1) Приведён правильный ответ без обоснования — 0 баллов.
- 2) Ошибки при вычислении — не более 5 баллов.