

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2024 – 2025 учебный год

7 класс (решения)

1. Найдите наименьшее пятизначное число, которое одинаково читается слева направо и справа налево и делится на 36.

Ответ: 21312.

Решение. Запишем число цифрами: $x = \overline{abcba}$. Число x делится на 4 когда число $\overline{ba} = 10b + a$ делится на 4. Условие минимальности показывает, что нужно взять минимальное возможное a . Возьмем $a = 2$ (меньше невозможно). Теперь нужно взять наименьшее b . Выберем $b = 1$ (опять меньше нельзя). Так как число должно делиться на 9, то на 9 делится число $2a + 2b + c = c + 6$. Значит $c = 3$. Итак, $x = 21312$.

2. Учитель написал на доске два числа друг под другом и попросил Мишу сложить их. Миша правильно сложил их и под введенными цифрами написал результат 39. Учитель стёр верхнее число, и оставшиеся два числа образовали новый пример на сложение. На этот раз Аня написала правильный результат под числами. Учитель снова стёр верхнее число, после чего Кирилл правильно подсчитал сумму двух оставшихся чисел - получилось 96. Определите два числа, которые изначально были написаны на доске.

Ответ: 21 и 18.

Решение. В последнем действии к числу 39 прибавили результат второго сложения и получили 96. Значит, сумма на втором этапе получилась 57. Она равна сумме второго числа и числа 39, поэтому второе число равно 18. Так как сумма первого и второго равна 39, то первое равно 21.

3. Что больше: $2024^{18} \cdot 18^{2024}$ или $2024^{2024} \cdot 18^{18}$?

Ответ: второе число больше.

Решение. Сравнивая эти числа, можно оба числа разделить на общий множитель $2024^{18} \cdot 18^{18}$. Остается сравнить 18^{2006} или 2024^{2006} . Понятно, что второе число больше первого.

4. В ряд выложены в произвольном порядке 50 красных и 50 синих шаров. Докажите, что можно убрать половину красных и половину синих шаров так, что среди оставшихся никакой синий не лежит между красными, и никакой красный не лежит между синими.

Решение: Поставим перегородку так, чтобы слева и справа от неё было по 50 шаров. Если слева оказалось по 25 шаров каждого цвета, то, значит, и справа от перегородки лежит 25 синих и 25 красных. Тогда уберём все синие слева от перегородки и все красные справа от перегородки. В результате слева останутся только красные, а справа только синие. Пусть теперь слева от перегородки синих больше, чем красных: n синих и $50 - n$ красных, причём $n > 25$, тогда справа лежат $50 - n$ синих и n красных. Уберём все красные слева от перегородки и все синие справа от перегородки. Теперь слева лежат только синие, а справа только красные, и тех и других по n штук. Осталось убрать ещё произвольные $n - 25$ синих и $n - 25$ красных.

5. Поле разделено на 9 прямоугольных участков, периметры некоторых из них известны (см. картинку). Найдите периметр всего поля.

	6	
6	4	12
	8	

Ответ: 28.

Решение: Способ первый. Будем называть вертикальный размер шириной участка, а горизонтальный — длиной. Рассмотрим участки во второй строчке таблицы. Обозначим их длины a_1, a_2, a_3 , а ширину b_2 . Тогда число $a_1 - a_2$ равно половине разности их периметров: $a_1 - a_2 = (6 - 4)/2 = 1$. Аналогично, $a_3 - a_2 = 4$. Итак, $a_1 = a_2 + 1$, $a_3 = a_2 + 4$. Длина поля $a = a_1 + a_2 + a_3 = 3a_2 + 5$.

Точно так же, рассматривая участки второго столбца, получим, что $b_1 = b_2 + 1$, $b_3 = b_2 + 2$. Длина поля b равна $3b_2 + 3$.

Общий периметр равен $2(a + b) = 6a_2 + 10 + 6b_2 + 6 = 6(a_2 + b_2) + 16$. Так как $2(a_2 + b_2) = 4$, то периметр равен $3 \cdot 4 + 16 = 28$.

Способ второй: Отрежем от поля четыре угловых прямоугольника. Оставшаяся фигура ("крест") имеет тот же периметр, что и исходный прямоугольник. Периметр этой фигуры легко сосчитать - нужно сложить периметры верхнего, нижнего, левого и правого прямоугольников и вычесть периметр внутреннего прямоугольника:

$$6 + 8 + 6 + 12 - 4 = 28.$$