

8 класс

Общие замечания. Если решение участника значительно отличается от приведенного здесь, требуется применить общие критерии проверки (в предисловии к данному сборнику). Если решение в целом верное – не менее 5 баллов, в том числе 5 за существенный недочет и 6 за менее существенный. Если в целом задача не решена – не более 3 баллов. Если к какой-либо задаче приведен неполный перечень критерий по баллам – также используются общие критерии.

1. Найдите все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющих равенству

$$x^4 + 2x^2y + 2y^2 - 2xy + x^2 = 0.$$

Ответ. $(0;0)$ и $(-1;-1)$.

Решение. $x^4 + 2x^2y + 2y^2 - 2xy + x^2 = (x^2 + y)^2 + (y - x)^2$. Тогда уравнение выполняется только при одновременном равенстве $(x^2 + y)^2 = 0$ и $(y - x)^2 = 0$. Тогда $y = x, x^2 + x = 0$. Отсюда $x(x + 1) = 0$, $x = 0$ или $x = -1$, получаем две пары чисел $(0;0)$ и $(-1;-1)$.

Критерии проверки. Только угадан ответ – 0 баллов. Дан ответ и сделаны попытки обоснования отсутствия других вариантов – 1 балл. Выделены полные квадраты – 2 балла (не суммируется с предыдущим!). Сведено к системе двух уравнений – 3 балла.

2. Муж с женой поехали на машине в санаторий, намерая преодолеть весь путь с постоянной скоростью. Однако, проехав $1/3$ дороги, они решили заправить машину, и пробыли на АЗС 10 минут. Продолжив движение, они увеличили скорость на 30% и надеялись успеть в санаторий даже раньше предполагаемого времени. Однако, отъехав от заправки на расстояние $1/12$ всего пути, они вспомнили, что забыла там кошелек, вернулись обратно, забрали кошелек и тотчас же снова поехали в нужном направлении. В итоге им удалось приехать в санаторий точно в изначально намеченное время. Сколько всего времени они пробыли в пути от дома до санатория?

Ответ. 6,5 ч.

Решение. Обозначим расстояние от дома до санатория s км, изначальную скорость машины v км/ч. Тогда планировавшееся время поездки $\frac{s}{v}$ ч. До заправки проехали $1/3$ пути, значит после нее $2/3 + 2 \cdot 1/12 = 5/6$ пути, так как пришлось дополнительно дважды проехать по $1/12$. Тогда время после заправки составило $\frac{5/6 \cdot s}{1.3v} = \frac{5s}{7.8v} = \frac{25s}{39v}$ ч. С учетом простоя на заправке, получаем уравнение $\frac{s}{v} = \frac{s}{3v} + \frac{25s}{39v} + \frac{1}{6}$. Отсюда $\frac{2s}{3v} - \frac{25s}{39v} = \frac{1}{6}$; $\frac{s}{39v} = \frac{1}{6}$; $\frac{s}{v} = \frac{39}{6} =$

6.5 ч, что и составляет планировавшееся время поездки, соответствующее фактическому.

Критерии проверки. Не учтено, что 1/12 проехали дополнительно 2 раза либо не учтено время стоянки на заправке – не более 2 баллов. Уравнение составлено в любых обозначениях, решено не верно – 4 балла. Допущена одна арифметическая ошибка, все остальное верно – 5 баллов.

Замечание. Возможны решения в совершенно других обозначениях: принятием пути за 1, обозначением времени на проезд всего пути по изначальному плану и т.д. С ними надлежит разбираться так же тщательно, они могут быть как полностью верны так и полностью или частично не верны.

3. Существуют ли три последовательных натуральных числа, произведение которых на 2024 больше их суммы?

Ответ. Нет.

Решение. Обозначим среднее число n , тогда меньшее $n-1$, большее $n+1$. Запишем условие: $(n-1) \cdot n \cdot (n+1) = n-1 + n + n+1 + 2024$. Отсюда $n^3 - n = 3n + 2024$; $n^3 - 4n = 2024$; $(n-2) \cdot n \cdot (n+2) = 2024$. Данное равенство невозможно при натуральных n , поскольку мы имеем три последовательных числа одной четности: либо они все нечетные, но 2024 – четное, либо они все четные, но хотя бы одно из них делится не только на 2, но и на 4, и тогда их произведение делится на 16, а 2024 – нет.

Замечание. Возможны другие обоснования отсутствия требуемого равенства: эти три числа имеют разные остатки от деления на 3, а значит одно из них делится на 3, а 2024 – нет, либо анализ возможных целых корней кубического уравнения. Решения в стиле «левая часть растет быстрее, чем правая, такое-то значение мало, а следующее – избыточно» оцениваются в 0 баллов, если не рассматривалась разность левой и правой частей и не доказывалось строго ее возрастание (инструментами, которыми владеют ученики 8 класса, это вряд ли достижимо).

Критерии проверки. Только ответ – 0 баллов. Составлено верное кубическое уравнение, далее продвижений нет – 2 балла.

4. Пять девушек-математиков решили сравнить гардеробы. Оказалось, что платьев у любых двух девушек не поровну, но их количества отличаются в целое число раз. Девушки договорились, что если у каких-то двоих отношение количеств платьев окажется числом простым, то девушка, у которой платьев больше, дарит утюг той, у которой их меньше (одна

девушка может и подарить, и получить в подарок несколько утюгов).
Сколько утюгов всего могло быть подарено?

Ответ. 0; 1; 2; 3; 4.

Решение. Разделим его на две части: «начало» и «продолжение».

1 способ начала. Рассмотрим полный граф на 5 вершинах, в которых запишем количества платьев у девушек, а на ребрах – их отношения. Максимально возможная нециклическая цепочка в нем имеет длину 4, именно такая степень простого множителя и может «накопиться» при переходе от меньших чисел к большим по ребрам. Любой цикл будет содержать ребро, на котором записано отношение, являющееся составным числом, так как оно равно произведению отношений по остальным ребрам этого цикла.

2 способ начала. Так как для любых двух девушек число платьев различно, все эти числа различны. Выберем наименьшее. Будем двигаться от него по возрастанию к наибольшему, максимальный по длине маршрут будет из 4 звеньев, которые могут давать отношение – простое число.

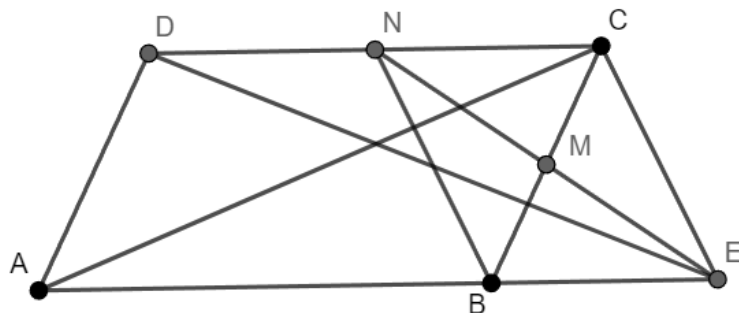
Продолжение. Два различных простых множителя использоваться не может, так как тогда отношение полученных с их помощью чисел не будет натуральным числом. Цепочка из звеньев с простыми числами может оказаться и короче, в том числе ее может вообще не быть.

Таким образом, возможны значения 0;1;2;3;4.

Примеры: 4: 1,2,4,8,16; 3: 1,2,4,8,32; 2: 1,2,4,16,64; 1: 1,2,8,32,128; 0: 1,4,16,64,256. Разумеется, примеров бесконечное множество.

Критерии проверки. Определено и обосновано наибольшее значение, никаких примеров нет – 3 балла. Приведен пример для наибольшего значения – 1 балл (суммируется с предыдущим). Указаны все возможные значения, примеры не приведены – 4 балла. Приведены не все примеры, обосновано наибольшее значение и указаны все возможные значения – 5 баллов. Все сделано, потеряно только значение 0 – 5 баллов. Все сделано, обоснование есть, но недостаточно – 6 баллов.

5. В параллелограмме ABCD отмечены точки M и N, служащие серединами сторон BC и CD соответственно, а на продолжении отрезка MN за точку M – точка E. При этом оказалось, что $EM = MN$, $BN = BC$. Докажите, что и $AC = ED$.



Решение.

Точка М является серединой отрезков BC и NE, поэтому BNEC – параллелограмм, отсюда $BN = CE$, а значит $CE = BC = AD$. Кроме того, BE параллельно NC, а значит точка Е лежит на прямой АВ. В силу сказанного ADCE является равнобокой трапецией, и тогда ее диагонали DE и AC равны.

Критерии проверки. Обосновано, что точка Е лежит на прямой АВ 2 балла, используется без обоснования – снимать 2 балла. Получено, что $CE = AD$ – 2 балла. Получено и первое и второе, но не указано, что это равнобокая трапеция – 5 баллов. Сделано все, кроме последнего шага (равенства диагоналей равнобокой трапеции) – 6 баллов.

6. Найдите количество 2024-значных натуральных чисел, десятичная запись которых содержит хотя бы одну цифру 7 и хотя бы одну цифру 8.

Ответ. $9 \cdot 10^{2023} + 6 \cdot 8^{2023} - 16 \cdot 9^{2023}$.

Решение. Введем обозначения и произведем подсчет, воспользовавшись во всех случаях правилом произведения для последовательного независимого выбора. Всего количество 2024-значных натуральных чисел $A = 9 \cdot 10^{2023}$, из них не содержащих ни 7, ни 8 будет $B = 7 \cdot 8^{2023}$, а не содержащих одной из цифр 7 или 8 по $C = 8 \cdot 9^{2023}$. (Везде первым множителем стоит количество вариантов для первой цифры числа, оно на 1 меньше, чем для остальных, поскольку первой цифрой не может быть 0.) Тогда содержащих одну из цифр 7 и 8 и не содержащих другую будет разность $C - B$, содержащих хотя бы одну из этих цифр будет $A - B$, отсюда нужно исключить количество чисел, в которых присутствует только одна из двух интересующих нас цифр, и тогда искомое количество выражается как $A - B - 2 \cdot (C - B) = A + B - 2C = 9 \cdot 10^{2023} + 7 \cdot 8^{2023} - 16 \cdot 9^{2023}$.

Критерии проверки. Верно подсчитаны отдельные элементы из А, В, С с указанием их смысла – 1 или 2 балла. Составлена верная схема вычислений, возможно, с привлечением операций над множествами, подсчетов нет или они неверны – 4 балла. Только одна ошибка в преобразованиях, остальное верно – 5 баллов.