Всероссийская олимпиада школьников по математике
муниципальный этап в 2024-2025 учебном году

Критерии и методика оценивания

8 класс

1. В десятизначном числе пронумеровали слева направо все цифры числами от 1 до 10, после чего все цифры с чётными номерами в том же порядке переставили на первые пять мест, а все цифры с нечётными номерами в том же порядке переставили на последние 5 мест. Получившееся число совпало с исходным. Какое наибольшее количество различных цифр может быть в таком числе?

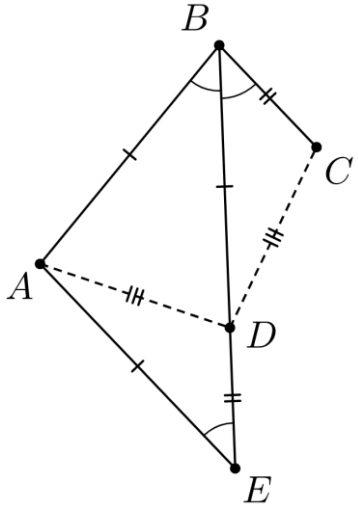
Ответ. 1.

Решение. Обозначим это десятизначное число через $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}}$. Тогда по условию оно совпадает с числом $\overline{a_2a_4a_6a_8a_{10}a_1a_3a_5a_7a_9}$. Значит, $a_1 = a_2 = a_4 = a_8 = a_5 = a_{10} = a_9 = a_7 = a_3 = a_6$, то есть все цифры обязаны быть одинаковыми. Число, состоящее из 10 одинаковых цифр, подходит.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.
Доказано, что все цифры обязаны быть одинаковыми, но не сказано, что число, состоящее из 10 одинаковых цифр, подходит – баллы не снимаются.

2. На биссектрисе острого угла ABC отмечены точки D и E так, что $AB = BD = AE$ и $DE = BC$ (точка D лежит между B и E). Докажите, что $AD = CD$.

Решение. Поскольку $AB = AE$, то треугольник ABE равнобедренный, значит $\angle AEB = \angle ABE$, а поскольку BE – биссектриса угла ABC, то $\angle AEB = \angle ABE = \angle EBC$. Рассмотрим треугольники AED и DBC. Стороны AE и BD, а также DE и BC равны по условию, и углы AED и DBC равны по ранее доказанному. Значит, эти треугольники равны по первому признаку равенства треугольников. Откуда $AD = CD$, что и требовалось.



Комментарий. Доказано, что $\angle AEB = \angle ABE$ – 2 балла.

3. На доске написаны четыре числа: 2, 3, 4 и 6. За один шаг можно выбрать любые три из них, и первое умножить на 2, второе – на 3, а третье – на 6 (при этом три старых числа стирают, а на их место записывают три новых). Можно ли через несколько шагов получить на доске четыре равных числа?

Ответ. Нельзя.

Решение. Произведение изначальных чисел на доске равнялось $2^4 \cdot 3^2$, а после каждой операции оно увеличивается в $2 \cdot 3 \cdot 6 = 2^2 \cdot 3^2$ раз, поэтому после n таких операций произведение чисел на доске будет равно $2^{4+2n} \cdot 3^{2+2n}$. Если после нескольких таких операций получились четыре равных числа, то их произведение имеет вид $2^{4x} \cdot 3^{4y}$, для натуральных x и y. Но числа $4+2n$ и $2+2n$ не могут одновременно делится на 4, получаем противоречие.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.

4. Найдите значение суммы $S = (1^2 + 1 \cdot 2 + 2^2) + (2^2 + 2 \cdot 3 + 3^2) + (3^2 + 3 \cdot 4 + 4^2) + \ldots$ $\ldots + (98^2 + 98 \cdot 99 + 99^2) + (99^2 + 99 \cdot 100 + 100^2)$.

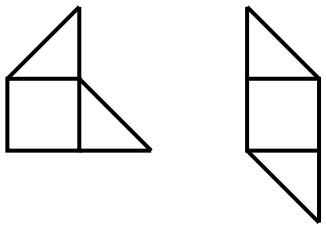
Ответ. $100^3 - 1^3 = 999999$.

Решение. Заметим, что $a^2 + ab + b^2 = \dfrac{b^3 - a^3}{b - a}$. Тогда

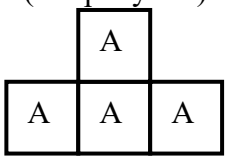
$$S = \frac{2^3 - 1^3}{2 - 1} + \frac{3^3 - 2^3}{3 - 2} + \ldots + \frac{100^3 - 99^3}{100 - 99} = 100^3 - 1^3 = 999999.$$

Комментарий. Ответ записан в виде $100^3 - 1^3$ – баллы не снимаются.

5. Назовем *квадроугольником* фигуру, которая состоит из клетки и двух примыкающих к ней треугольников, каждый из которых является половиной клетки. Ниже приведены примеры двух квадроугольников.



Можно ли разрезать клетчатую фигуру, состоящую из 4 клетчатых квадратов А размера 7×7, составленных в виде т-тетрамино (см. рисунок) на квадроугольники?



Ответ. Нельзя.

Решение. Рассмотрим шахматную раскраску клеток заданной фигуры (пусть для определенности угловые клетки чёрные). Заметим, что каждый квадроугольник содержит

ровно одну белую и ровно одну чёрную клетки. Если бы фигуру можно было бы разрезать на квадроугольники, то в ней было бы одинаковое количество чёрных и белых клеток. Однако в трёх квадратах 7×7 будет 25 чёрных и 24 белых клетки, а в одном – 24 чёрных и 25 белых, то есть всего в фигуре будет 99 чёрных и 97 белых клеток. Значит, разрезать данную фигуру на квадроугольники невозможно.

Комментарий. Верный ответ без обоснования – 0 баллов.