

# Условия и решения задач

## 8 класс

**1. Все десятизначные числа, которые можно записать только цифрами 6 и 7, Олег записал в порядке возрастания. На каком месте в этом ряду стоит число 7777777666?**

*Решение.* Всего существует  $2^{10} = 1024$  десятичных чисел, которые можно записать только цифрами 6 и 7. больше указанного числа записаны только числа 7777777667, 77777777676, 7777777677, 7777777766, 7777777767, 77777777776 и 7777777777, то есть указанное число является восьмым с конца. Следовательно, это 1017-е число с самого начала.

*Ответ:* На 1017-ом месте.

**2. Для каких натуральных  $N$  выражение  $S_n = (1^2)! + (2^2)! + (3^2)! + \dots + (n^2)!$  является точным квадратом?**

*Примечание.* Для натурального числа  $k$  значение  $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$ .

*Решение.* Для  $n = 1$  и  $n = 2$  все проверяется напрямую. Для  $n \geq 3$  имеем, что

$$S_n = (1^2)! + (2^2)! + (3^2)! + \dots + (n^2)! = 25 + 9! + 16! + \dots + (n^2)!.$$

В этом равенстве все члены кроме  $9!$  делятся на 25, а  $9!$  - делится на 5, но не делится на 25. поэтому и  $S_n$  имеет такое же свойство, что для квадратов целых чисел невозможно.

*Ответ:*  $n = 1, 2$ .

**3. Известно, что числа  $a$  и  $b$  удовлетворяют условиям:**

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{11}{2} \qquad \frac{b}{a} + \frac{a}{b} = \frac{101}{10}.$$

**Чему может равняться значение суммы  $a + b$ ?**

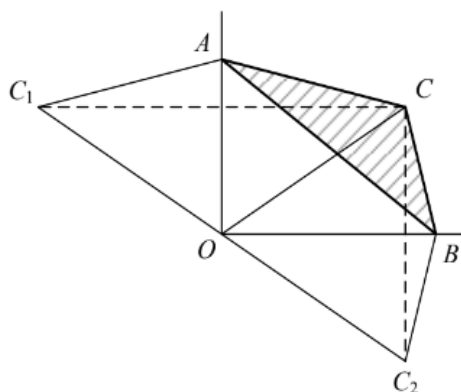
*Решение.* Рассмотрим следующее произведение:

$$\begin{aligned} \frac{11}{2}(a+b) &= \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a+b) = 1 + \frac{b}{a} + 1 + \frac{a}{b} = 2 + \frac{101}{10} = \frac{121}{10} \Rightarrow a + \\ b &= \frac{121}{10} \cdot \frac{2}{11} = \frac{11}{5}. \end{aligned}$$

*Ответ:*  $a + b = 11/5$ .

**4. Точка  $C$  лежит внутри прямого угла  $AOB$ . Докажите, что периметр треугольника  $AOB$  больше, чем  $2 \cdot OC$ .**

*Решение.* Пусть  $C_1$  – точка, симметричная точке  $C$  относительно прямой  $OA$  (см.рисунок), а  $C_2$  симметрична относительно прямой  $OB$ . Это означает, что  $CC_1 \perp OA$  и  $OC = OC_1$ . Тогда  $\angle C_1OC_2 = \angle C_1OC + \angle COC_2 = 2(\angle AOC + \angle COB) = 180^\circ$ . Отсюда точки  $C_1$ ,  $O$  и  $C_2$  лежат на одной прямой. Далее из неравенства треугольника имеем, что  $P_{\triangle ABC} = AC + BC + AB = AC_1 + BC_2 + AB > C_1C_2 = 2 \cdot OC$ , что и требовалось доказать.



5. Найдите все наборы натуральных чисел  $m$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , которые удовлетворяют уравнению

$$m! = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z.$$

**Примечание.** Через  $m!$  обозначают произведение  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m$  всех натуральных чисел, не превышающих  $m$ , т.е.  $m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m$ .

**Решение.** Поскольку  $z$  – это натуральное число, а 5 – простое число, тогда  $m!$  должно делиться на 5, а, значит,  $m \geq 5$ . с другой стороны, если  $m \geq 7$ , то число  $m!$  делится на 7, а правая часть уравнения на 7 не делится при каких-либо натуральных значениях  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Следовательно,  $m = 5$  или  $m = 6$ . Поскольку  $5! = 120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$  и  $6! = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1$ , то уравнение имеет два решения  $(m, x, y, z) : (5, 3, 1, 1)$  и  $(6, 4, 2, 1)$ .

**Ответ:**  $(5, 3, 1, 1)$  и  $(6, 4, 2, 1)$ .