

**Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников
по математике
2024-2025 учебный год
8 класс
Максимальный балл – 35**

1. В некоторой школе учится 56 двоечников, 35 троечников, 24 хорошиста и 3 отличника. В школе придумали новую систему повышения успеваемости и теперь если троечник научит двоечника, то он станет хорошистом, а двоечник уйдёт из школы. Если хорошист научит двоечника, то он станет отличником, а двоечник уйдёт из школы. Через год в школе оказалось только три двоечника, зато отличников стало 33. А сколько троечников?

Ответ. 12.

Решение. Отличники могли получиться только из хорошистов, при этом каждый раз уходил один двоечник. Количество отличников увеличилось на 30, то есть на их превращение ушло 30 двоечников. Остальных $56 - 3 - 20 = 23$ двоечников могли научить только троечники, становясь хорошистами. Значит, осталось $35 - 23 = 12$ троечников.

Критерии. Полное решение – 7 баллов. Только ответ – 0 баллов.

2. Заскучавший на уроке Петя решил выписывать в тетрадь числа по следующему правилу – первое из них равно 7, а каждое следующее равно сумме цифр квадрата предыдущего числа, увеличенной на 1. Когда прозвенел звонок, Петя заметил, что выписал ровно 2024 числа. Какое число он выписал последним?

Ответ. 5.

Решение. Попробуем выписать члены последовательности:

7, 14, 17, 20, 5, 8, 11, 5, 8, 11, 5...

В ней, начиная с пятого члена, повторяется период 5, 8, 11 длины 3. Так как $2024 - 4 = 2020$ при делении на 3 даёт остаток 1, то на 2024-м месте в последовательности стоит число 5.

Критерии. Полное решение – 7 баллов.

Верно найден цикл, но ошибка в подсчёте – не более 3 баллов.

Верно найден цикл без дальнейшего продвижения – 1 балл.

3. Каков наименьший возможный периметр треугольника, все длины сторон которого являются квадратами различных положительных целых чисел?

Ответ. 77.

Решение. *Пример.* Существует треугольник с длинами сторон 4^2 , 5^2 , 6^2 , периметр которого равен 77. Треугольник с такими сторонами существует, так как они удовлетворяют неравенству треугольника, действительно $16 + 25 > 36$, $16 + 36 > 25$, $36 + 25 > 16$.

Оценка. Если длины сторон равны a^2 , b^2 , c^2 , причем $0 < a < b < c$, то $a^2 + b^2 > c^2$ по неравенству треугольника. Следовательно, $(b - 1)^2 + b^2 \geq a^2 + b^2 > c^2 \geq (b + 1)^2$. Решение этого неравенства даёт $b > 4$. Если $b \geq 6$, то $a^2 + b^2 + c^2 \geq 6^2 + 7^2 > 77$. Возьмём $b = 5$, тогда $c \geq 7$ – невозможно. А при $c = 6$ получаем, что $a = 4$, что даёт периметр 77.

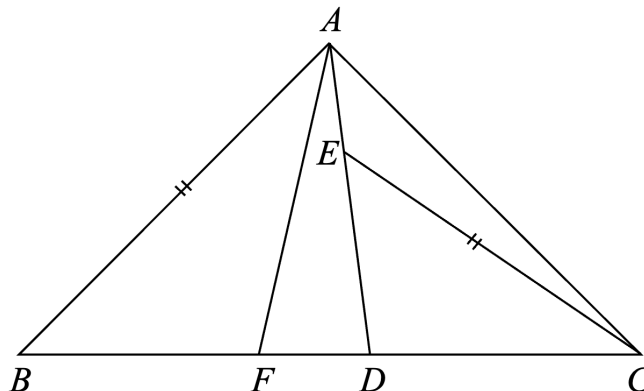
Критерии. Полное решение – 7 баллов. Только ответ без пояснений – 0 баллов.

Пример оценивается в 3 балла. Оценка оценивается в 4 балла.

Пример без объяснения, то есть ссылки на неравенство треугольника – 1 балл.

Приведён пример треугольника со сторонами 1, 1, 1 – 0 баллов.

4. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка D , на отрезке AD выбрана точка E , а на отрезке BD — точка F , причём $AE = 1$, $BF = DE = 2$ и $CD = 3$. Оказалось, что $AB = CE$. Найдите длину отрезка AF .



Ответ. $AF = 3$.

Решение 1. Треугольник ADC равнобедренный, $\angle EAC = \angle BCA$. Треугольники EAC и BCA имеют общую сторону AC , а также равные углы $\angle EAC = \angle BCA$, лежащие напротив равных сторон $EC = AB$. Следовательно, эти треугольники равны или «почти равны», то есть углы напротив стороны AC равны либо дают в сумме 180° . Но равны эти углы быть не могут, так как $\angle AEC$ лежит внутри угла $\angle ABC$ (и поэтому больше него). Таким образом,

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle AEC = \angle CED.$$

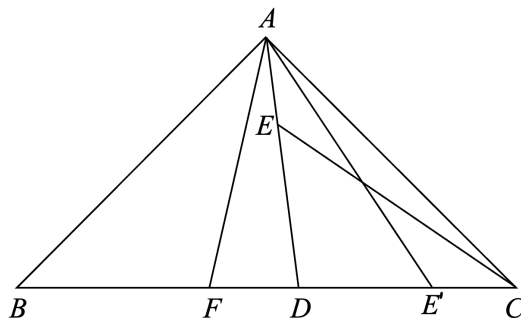
А тогда треугольники ABF и CED равны по двум сторонам и углу между ними, и $AF = CD = 3$.

Решение 2. Заметим, что треугольник ADC равнобедренный:

$$DC = 3 = AE + ED = AD.$$

На его боковой стороне AD отмечена точка E , для которой $AE = 1$, $DE = 2$. Сделаем симметричное дополнительное построение: отметим на другой боковой стороне CD точку E' , для которой $CE' = 1$, $DE' = 2$. Из соображений симметрии $AE' = CE$. Поэтому $AE' = AB$.

Таким образом, на основании равнобедренного треугольника ABE' появились точки F и D , симметричные относительно его середины ($BF = DE' = 2$). Из этого следует, что $AF = AD = 3$.



Критерии. Полное решение – 7 баллов. Только ответ – 0 баллов.

5. Клетки доски 8×8 раскрашены в шахматном порядке. Разрешается менять местами любые две горизонтали или любые две вертикали. Сколько различных раскрасок можно получить такими операциями? (Раскраски отличающиеся поворотом, переворотом – различные)

Ответ. 2450.

Решение. Заметим, что при разрешённых операциях возможны только два вида столбцов. Действительно, изначально есть два вида столбцов – те, у которых верхняя клетка чёрная, и те, которые получаются из первого вида заменой всех клеток на противоположные. Если поменять местами две строки, то все столбцы первого типа изменятся одинаково (в них клетка с номером x поменяется с клеткой номер y) и все столбцы второго типа изменятся одинаково. То свойство, что первый вид столбцов переходит во второй, при замене всех цветов на противоположные тоже сохранится. При перестановке столбцов сами столбцы не меняются. Поэтому в каждый момент на доске есть только два вида столбцов, причём в каждом из них четыре чёрные клетки и разные столбцы отличаются цветами клеток во всех позициях. В первом столбце можно добиться любого положения четырёх чёрных клеток переменной строк (C_8^4 разных способов). Тем самым мы определили, какие столбцы будут присутствовать в таблице. Их можно разместить C_8^4 способами. Значит, разных раскрасок может получиться $\frac{1}{2}(C_8^4)^2$. Умножение на $\frac{1}{2}$ возникло из-за того, что случаи, когда первые столбцы отличаются друг от друга заменой всех цветов на противоположные, дают тот же набор раскрасок.

Критерии. Полное решение – 7 баллов.

При правильном решении допущена арифметическая ошибка – снять 1 балл.

Нет множителя $\frac{1}{2}$, то есть упущенно, что замена всех цветов в первых двух столбцах даёт тот же набор – снять 3 балла.

Доказано, что есть только два вида столбцов без дальнейшего продвижения – 2 балла.

Только ответ – 0 баллов.