Муниципальный этап ВсОШ 2024-2025 уч.г.
математика 8 класс критерии проверки
Работа рассчитана на 240 минут

1. Петя ошибся, записывая десятичную дробь: цифры записал верно, а запятую сдвинул на одну позицию. В результате получилось число, которое меньше нужного на 19,71. Какое число должен был записать Петя?

Ответ: 21,9.

Решение. Так как в результате ошибки число уменьшилось, то запятая была сдвинута влево. При этом число уменьшилось в 10 раз. Пусть получилось число x, тогда искомое число – это $10x$. По условию: $10x - x = 19{,}71$, значит, $x = 2{,}19$, $10x = 21{,}9$.

Критерии проверки:

2 балла - приведено полное обоснованное решение;

1 балл - приведено верное рассуждение, но допущена вычислительная ошибка;

1 балл - приведены верное уравнение и верный ответ, но не объяснено, почему запятая сдвинулась влево;

0 баллов - приведен только верный ответ;

0 баллов - задача не решена или решена неверно.

2. Могут ли произведения всех ненулевых цифр двух последовательных натуральных чисел отличаться ровно в 54 раза?

Ответ: да.

Решение. Таким свойством обладают, например, числа 299 и 300. Действительно, $2 \cdot 9 \cdot 9 : 3 = 54$. Эти два числа — наименьшие из возможных. Другие примеры получатся, если выбрать любые два последовательных числа, оканчивающиеся на 299 и 300.

Критерии проверки:

2 балла – приведен верный пример;

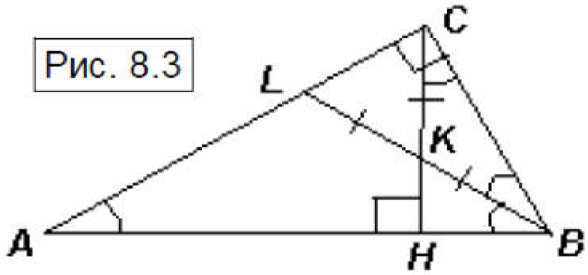
0 баллов - приведен только ответ «да» или «нет»;

0 баллов – задача не решена или решена неверно.

3. Высота CH, опущенная из вершины прямого угла треугольника ABC, делит биссектрису BL этого треугольника пополам. Найдите угол BAC.

Ответ: 30°.

Решение. Пусть CH и BL пересекаются в точке K (см. рис. 8.3).



Тогда CK – медиана прямоугольного треугольника BCL, проведенная к гипотенузе, значит, $CK= 0,5BL = BK$. Тогда $\angle KCB = \angle KBC = \angle KBH$. Так как сумма этих трех углов равна 90° (из треугольника CBH), то каждый из них равен 30°. Следовательно, $\angle CBA$ =60°, $\angle BAC$ = 30°.

Критерии проверки:

3 балла - приведено полное обоснованное решение;

2 балла - приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности, не повлиявшие на ответ

1 балл - доказано, что CK = 0,5BL, но дальнейшие рассуждения содержат ошибки или отсутствуют;

0 баллов - приведен только ответ;

0 баллов - задача не решена или решена неверно.

4. В классе учатся 30 человек: отличники, троечники и двоечники. Отличники на все вопросы отвечают правильно, двоечники всегда ошибаются, а троечники на заданные им вопросы строго по очереди то отвечают верно, то ошибаются. Всем ученикам было задано по три вопроса: “Ты отличник?”, “Ты троечник?”, “Ты двоечник?”. Ответили “Да” на первый вопрос – 19 учащихся, на второй – 12, на третий – 9. Сколько троечников учится в этом классе?

Ответ: 20 троечников

Решение. Пусть a – количество отличников, b – количество двоечников, c – количество троечников, которые ошиблись в ответе на первый вопрос, правильно ответили на второй и ошиблись в ответе на третий (назовем таких троечников троечниками первого типа), а d – количество троечников, которые правильно ответили на первый вопрос, ошиблись в ответе на второй и правильно ответили на третий (назовем таких троечников троечниками второго типа). На первый вопрос ответили “Да” отличники, двоечники и троечники первого типа, следовательно, $a + b + c = 19$. На второй вопрос “Да” ответили двоечники и троечники первого типа, то есть $b + c = 12$. На третий вопрос “Да” ответили только троечники первого типа, то есть $c = 9$. Тогда из второго уравнения получим, что $b = 3$, а из первого уравнения: $a = 7$. В классе – 30 учащихся, значит $d = 30 – 19 = 11$, поэтому всего троечников: 9 + 11 = 20.

Критерии проверки:

3 балла - приведено полное обоснованное решение;

2 балла - приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности;

1 балл - в приведенных рассуждениях указано, что троечники бывают двух типов, но дальнейших продвижений нет или допущена вычислительная ошибка;

0 баллов - задача не решена или решена неверно.

5. У натурального числа N выписали все его делители, затем у каждого из этих делителей подсчитали сумму цифр. Оказалось, что среди этих сумм нашлись все числа от 1 до 9. Найдите наименьшее значение N.

Ответ: 288.

Решение. Заметим, что у числа 288 есть делители 1, 2, 3, 4, 32, 6, 16, 8, 9. Поэтому это число удовлетворяет условию задачи. Докажем, что меньшего числа, удовлетворяющего условию, не существует.

Действительно, так как N должно иметь делитель с суммой цифр 9, то N делится на 9. Рассмотрим теперь делитель d с суммой цифр 8. d не делится на 3, поэтому числа d и 9 – взаимно простые, значит, N делится на $9d$. При этом, если $d \geq 32$, то $9d \geq 288$, то есть $N \geq 288$. Значит, остается проверить $d = 26$, $d = 17$ и $d = 8$. Если $d = 26$, то $9d = 234$. У этого числа нет делителя с суммой цифр 5, а любое число, ему кратное, больше, чем 288.
Если $d = 17$, то $9d = 153$. У этого числа нет делителя с суммой цифр 2, а любое число, ему кратное, больше, чем 288.

Если $d = 8$, то $9d = 72$. Ему кратные и меньшие, чем 288 – это 144 и 216. Но у этих чисел нет делителя с суммой цифр 5.

Критерии проверки:

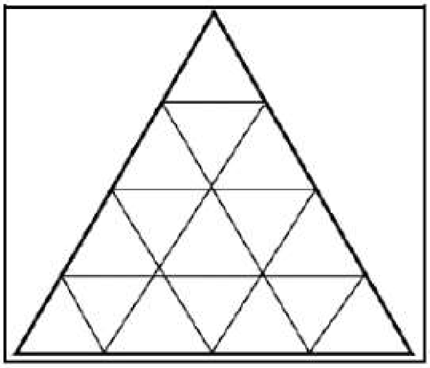
3 балла - приведено полное обоснованное решение;

2 балла - приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности;

1 балл приведен только верный ответ:

1 балл - задача не решена или решена неверно.

6. Треугольник разбит на треугольные ячейки так, как показано на рисунке. В каждую ячейку вписали натуральное число. Для каждой стороны треугольника есть четыре слоя, параллельных этой стороне, содержащие семь, пять, три и одну ячейку соответственно. Оказалось, что сумма чисел в каждом из этих двенадцати слоёв – простое число. Какова наименьшая возможная сумма всех записанных чисел?



Ответ: 22.

Решение. Пример. В каждую из трёх угловых ячеек впишем число 3, а в каждую из остальных – число 1. Тогда сумма записанных чисел равна $3 \cdot 3 + 13 \cdot 1 = 22$, а суммы чисел в слоях: 11, 5, 3 и 3 соответственно.

Оценка. Любая угловая ячейка – это отдельный слой, поэтому в каждой такой ячейке должно стоять, как минимум, число 2. Рассмотрим, например, остальные горизонтальные слои. В двух слоях ниже угловой ячейки можно поставить числа с минимальными суммами:1-1-1 и 1-1-1-1-1. Тогда в нижнем слое расстановка с минимальной суммой: $2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 9$, но это не простое число. Ближайшее простое число, большее девяти, – это 11. Тогда сумма всех чисел не меньше, чем $2 + 3 + 5 + 11 = 21$.

Но эта сумма не достигается, так как при аналогичном рассмотрении четырёх слоев вдоль других сторон исходного треугольника, получим, что добавить 2 надо в каждый слой из семи ячеек. Следовательно, 22 – наименьшая возможная сумма.

Критерии проверки:

3 балла - приведено полное обоснованное решение;

2 балла - приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности;

1 балл - приведён верный ответ и верный пример, но оценка отсутствует;

0 баллов - приведен только ответ;

0 баллов - задача не решена или решена неверно.