

## 8 класс

Общие критерии оценивания заданий приведены в таблице:

| Баллы | Правильность (ошибочность) решения                                                                                                                                    |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 7     | Полное верное решение.                                                                                                                                                |
| 6-7   | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.                                                                                           |
| 5-6   | Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| 4     | Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.                                        |
| 2-3   | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.                                                                                                    |
| 0-1   | Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).                                                                               |
| 0     | Решение неверное, продвижения отсутствуют.                                                                                                                            |
| 0     | Решение отсутствует.                                                                                                                                                  |

При оценивании заданий следует придерживаться указаний, данных в комментариях к данной задаче или к данному способу решению задачи.

Нельзя уменьшать количество баллов за то, что решение слишком длинное. Исправления в работе (зачеркивания ранее написанного текста) также не являются основанием для снятия баллов. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

-----

-----

**8.1.** Бегуны Алёша, Боря и Ваня стартовали одновременно на дистанции 1 км. Когда Алёша финишировал, Боря отставал от него на 100 метров, а Ваня отставал от Бори на 90 метров. Алёша закончил бег на 18 секунд раньше Бори. На сколько секунд позже Бори закончил бег Ваня?

Ответ: на 20 секунд

1-е решение. Обозначим скорости Бори и Вани за  $x$  (м/с) и  $y$  (м/с) соответственно. Тогда  $100/x = 18$ ,  $900/x = 810/y$ . Отсюда  $y = 0,9x = 90/18 = 5$ . Ваня закончил бег позже Бори на  $190/y - 18 = 20$  секунд.

2-е решение. Скорость Бори равна  $100/18 = 50/9$  м/сек. Так как за время, затраченное Борей на  $1000 - 100$  метров, Ваня пробежал  $1000 - 100 - 90$  метров, то скорость Вани равна  $(1000 - 100 - 90)/((1000 - 100):(50/9)) = 810/162 = 5$  м/сек. Поэтому Ваня закончил бег на  $190/5 - 100/(50/9) = 38 - 18 = 20$  секунд.

Комментарии. Только верный ответ – 0 баллов.

**8.2.** На доске записаны пятизначное число  $N$  и ещё четыре числа: сумма первых двух цифр числа  $N$ , сумма первых трёх цифр числа  $N$ , сумма первых четырёх цифр числа  $N$  и сумма всех пяти цифр числа  $N$ . В результате на доске оказались записаны: одна цифра 1, шесть цифр 2, одна цифра 4, три цифры 6 и две цифры 8. Найдите  $N$ .

Ответ: 88622

Решение. Пусть цифры числа  $N$  слева направо:  $a, b, c, d, e$ . Так как всего записано  $1+6+1+3+2 = 13 = 5+2+4$  цифр, а каждая из четырёх указанных сумм цифр не более  $5 \cdot 8 = 40$ , то каждая из четырёх указанных сумм цифр является двузначным числом. Поэтому для цифр  $a$  и  $b$  возможны следующие четыре варианта:  $(8, 8)$ ,  $(8, 6)$ ,  $(6, 8)$ ,  $(6, 6)$ ,  $(8, 4)$ ,  $(4, 8)$ . Так как цифра 1 записана один раз,  $12 \leq a + b \leq 16$ ,  $a + b + c + d + e > a + b + c + d > a + b + c \geq 22$  и  $a + b + c \leq 8 + 8 + 6 = 22$ , то  $a + b + c = 22$ , варианты  $(6, 6)$ ,  $(8, 4)$ ,  $(4, 8)$  невозможны, а цифра 2 встретится еще ровно четыре раза в записи чисел  $d, e, a + b + c + d, a + b + c + d + e$ . Поэтому цифра 2 встретится по разу в записи чисел  $a + b$

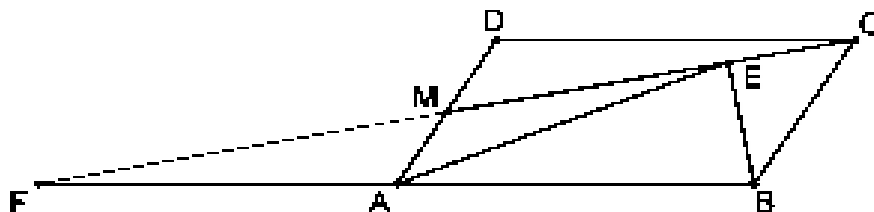
$+c+d$  и  $a+b+c+d+e$ , и обе последние цифры  $d$  и  $e$  числа  $N$  равны 2. Тогда  $a+b+c+d=24$  и  $a+b+c+d+e=26$ . Так как цифра 4 записана один раз, то для  $(a, b)$  подходит только вариант  $(8, 8)$ . Поэтому  $N = 88622$ .

Комментарии. Только верный ответ – 0 баллов.

Доказано, что каждая из цифр  $a$  и  $b$  равна 8 или 6 – 1 балл.

Доказано, что  $a+b+c=22$  – 1 балл.

**8.3.** В параллелограмме  $ABCD$  точка  $M$  – середина стороны  $AD$ ,  $E$  – точка на отрезке  $MC$ . Докажите, что если  $AE = AB$ , то угол  $BEM$  прямой.



Решение. Продолжим  $CM$  за точку  $M$  до пересечения с  $AB$  в точке  $F$  (см. рис.). Так как  $AM = MD$ , угол  $MAF$  равен углу  $MDC$ , угол  $AMF$

равен углу  $CMD$ , то треугольник  $AMF$  равен треугольнику  $CMD$ . Следовательно,  $AE = AB = AF$ , треугольники  $ABE$  и  $AFE$  – равнобедренные и сумма углов  $MEA$  и  $BEA$  равна сумме углов  $AFE$  и  $ABE$  и равна  $180^\circ/2 = 90^\circ$ .

Комментарии. Доказано равенство треугольников  $AMF$  и  $CMD$  – 1 балл.

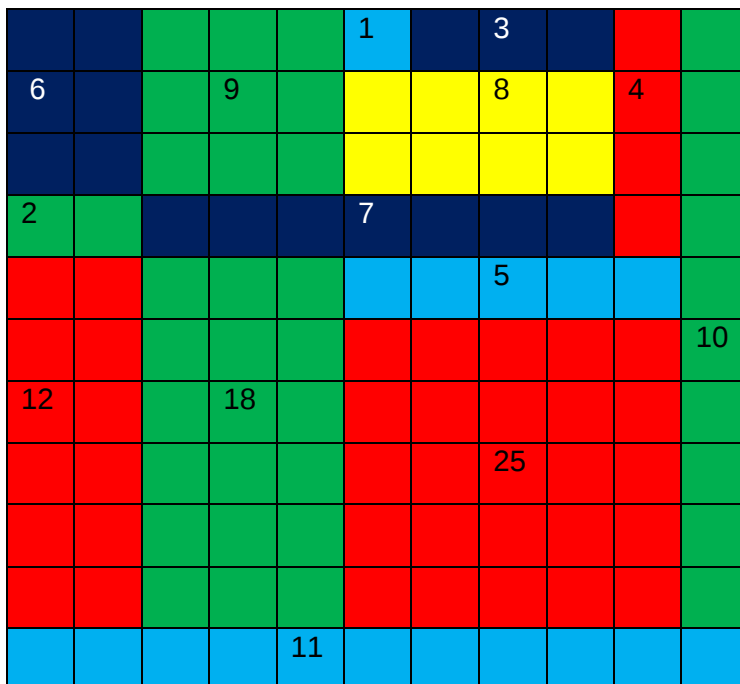
Доказано, что  $AE = AB = AF$  – 3 балла.

**8.4.** Квадрат  $11 \times 11$  разрезают по линиям клеток на различные по площади прямоугольники. Какое наибольшее число прямоугольников может получиться?

Ответ: 14.

Решение. Оценка: среди полученных при разрезании прямоугольников нет прямоугольника с площадью 13. Поэтому сумма наименьших возможных площадей четырнадцати прямоугольников  $1+2+3+\dots+11+12+14+15 = 107 < 11^2 = 121$ , а сумма наименьших возможных площадей пятнадцати прямоугольников равна  $107 + 16 = 123$ , что больше площади квадрата  $11 \times 11$ , которая равна 121. Значит, при разрезании квадрата  $11 \times 11$  по линиям клеток больше четырнадцати прямоугольников получить нельзя.

Пример: четырнадцать слагаемых  $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+18+25 = 121$  (см. рисунок)



Комментарии. Только верный ответ – 0 баллов. Верно получена оценка – 4 балла.  
Приведён верный пример – 3 балла.

**8.5.** Найдите все такие целые положительные числа  $n$ , для которых сумма  $S_n = (1^2)! + (2^2)! + (3^2)! + \dots + (n^2)!$  является квадратом некоторого целого числа. ( $k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k$ )

Ответ:  $n = 1$  или  $n = 2$ .

Решение. При  $n = 1$  имеем:  $S_1 = (1^2)! = 1^2$ . При  $n = 2$  имеем:  $S_2 = (1^2)! + (2^2)! = 25 = 5^2$ .

При  $n \geq 3$  имеем:  $S_n = 25 + 9! + 16! + \dots + (n^2)! \neq m^2$ , так как все слагаемые делятся на 5 и все слагаемые, кроме  $9!$ , делятся на 25.

Комментарии. Только верный ответ – 0 баллов.  
Проверено, что оба случая  $n = 1$  или  $n = 2$  подходят – 1 балл.