Решения заданий муниципального этапа
Всероссийской олимпиады школьников по математике
2024-2025 учебный год, 8 класс

8.1. Сколько раз встречается число 24 в записи числа 12345678910111213……2024, состоящей из упорядоченного ряда натуральных чисел от 1 до 2024 ?

Ответ: 52 раза

Решение. В каждой сотне число, оканчивающееся на 24, встречается 1 раз. Таких чисел 21(20 сотен и число 2024). Если число 24 используется на позиции записи сотен и десятков, то всего таких чисел 20 (240, 241, …… 249, 1240, 1241, …… 1249). Если в последовательности натуральных чисел одно число оканчивается на 2, а другое начинается на 4, то таких чисел 11: 42, 43 и 402,403; 412, 413; …….. 492, 493. Таким образом, всего число 24 в записи встречается 52 раза.

8.2. В вершинах квадрата записали четыре натуральных числа. Возле каждой стороны записали произведение чисел в ее концах. Сумма этих произведений равна 143. Найдите сумму чисел в вершинах.

Ответ: 24.

Решение: Пусть в вершинах квадрата были записаны числа a, b, c, d. Тогда возле сторон были записаны числа ab, bc, cd и da. Их сумма равна $ab + bc + cd + da = (a + c)(b + d) = 143$. Разложим 143 на множители: $143 = 13 \cdot 11 = 143 \cdot 1$. Других разложений нет, так как 13 и 11 – простые числа. Вариант $143 \cdot 1$ не подходит, так как сумма натуральных чисел не может равняться 1. Значит, $a + c = 13$, $b + d = 11$ или наоборот. В обоих случаях $a + b + c + d = 13 + 11 = 24$.

Комментарий: Дан только ответ – 1 балл. Если не рассмотрен вариант $143 \cdot 1$ – не более 5 баллов.

8.3. Докажите, что число $3n^4 + 14$ может быть представлено в виде суммы квадратов трёх различных целых чисел? Ответ обоснуйте.

Решение: Выполним равносильные преобразования: $3n^4 + 14 = (n^4 + 1) + (n^4 + 4) + (n^4 + 9) = = (n^4 + 2n^2 + 1) - 2n^2 + (n^4 + 4n^2 + 4) - 4n^2 + (n^4 - 6n^2 + 9) + 6n^2 = = (n^2 + 1)^2 + (n^2 + 2)^2 + (n^2 - 3)^2$. Остаётся заметить, что числа $n^2 + 1$, $n^2 + 2$ и $n^2 - 3$ — целые и различные.

8.4. ABCD – квадрат. Треугольники AMD и AKB оба равносторонние (см. рис. 1). Лежат ли точки C, K и M на одной прямой?

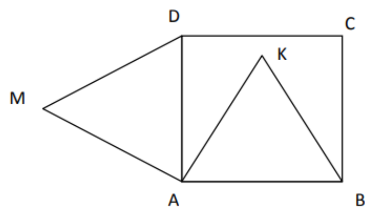

Рис. 1.

Ответ: Точки C, K и M лежат на одной прямой.

Решение. По условию <MAD = <KAB = <KBA =< AKB = 60º, <DAB = <CBA = 90º и MA =AD =AB =AK , BC = BA =BK . Вычислим углы равнобедренного треугольника MAK: <MAK = <MAD + <DAB - <KAB = 90º, <AMK = <AKM = (180º - 90º) : 2 = 45º Вычислим углы равнобедренного треугольника CBK: <KBC = <CBA - <KBA = 30º , <BKC = <BCK = (180º - 30º) : 2 = 75º. Имеем <MKC = <AKM + <AKB +< BKC = 45º + 60º +75º =180º, т.е. точки лежат на одной прямой.

8.5. Света, Даша и Маша играли в теннис «на высадку», то есть в каждой партии двое играют, а третий ждет и в следующей партии заменяет проигравшего (ничьих в теннисе не бывает). В итоге оказалось, что Света сыграла 12 партий, а Даша - 25 партий. Сколько партий Даша отдыхала?

Ответ: ни одной.

Решение: Так как Даша играла со Светой не больше 12 раз, с Машей она играла не меньше 13 раз. С другой стороны, Даша с Машей не могли играть 2 раза подряд, их партии чередовались с одной или несколькими подряд партиями Светы. Значит, партий Даши с Машей не больше 13 (иначе промежутков, а значит, и партий Светы больше 12). Поэтому партий Даши с Машей ровно 13, а со Светой 25 – 13 = 12. Значит, Света с Машей не играли ни одной партии, то есть Даша не отдыхала.