Муниципальный этап
всероссийской олимпиады школьников
по математике
в 2024-2025 учебном году
в Кемеровской области – Кузбассе

Теоретический тур

8 класс

Решения задач, критерии оценивания

1. Для некоторого целого n известно, что $2n + 1 \vdots 3$. Какой остаток дает выражение $14n + 41$ при делении на 3?

Решение. Имеем: $14n + 41 = 7(2n + 1) + 33 + 1$. В последнем выражении из трех слагаемых первое и второе делятся на 3, поэтому оно дает остаток 1.
Ответ: 1.

Критерии. Любое верное решение - 7 баллов. Правильный ответ без решения - 0 баллов.

2. На доске выписаны 2024 произвольных целых числа. Оказалось, что сумма любых шести из них отрицательна. Может ли сумма всех быть положительной?

Решение. Упорядочим числа по убыванию. Сумма первых 6 чисел отрицательна, значит последнее среди них (минимальное) должно быть отрицательно. Все числа, следующие за ним в ряду также должны быть отрицательны. Сумма всех чисел состоит из отрицательной суммы первых шести и суммы всех остальных, каждое из которых отрицательно. Значит сумма не может быть положительной.
Ответ: нет.

Критерии. Любое верное решение - 7 баллов. Правильный ответ без решения - 0 баллов.

3. Даны три положительных числа x, y, z (необязательно целых). Докажите, что

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} > 1$$

Решение 1.
Имеем: $\frac{x}{y+z} > \frac{x}{x+y+z}$, $\frac{y}{x+z} > \frac{y}{x+y+z}$, $\frac{z}{x+y} > \frac{z}{x+y+z}$. Сумма левых частей этих неравенств дает нам левую часть заданного неравенства. Сумма правых частей равна 1.
Решение 2.
Переобозначим числа так, что $x \le y \le z$. Тогда $\frac{y}{x+z} \ge \frac{y}{2z}$, $\frac{z}{x+y} \ge \frac{z}{2y}$.

Согласно неравенству Коши: $\frac{\frac{y}{2z}+\frac{z}{2y}}{2} \ge \sqrt{\frac{y}{2z} \cdot \frac{z}{2y}}$, откуда сумма $\frac{y}{2z} + \frac{z}{2y} \ge 1$. Так как дробь $\frac{x}{y+Z}$ положительна, получаем требуемое.

Критерии. Любое верное решение - 7 баллов. Правильный ответ без решения - 0 баллов.

4. Однажды четверо ребят решили украсить двор – посадить в ряд несколько елей и рябин. При этом они считают ряд «красивым», если никакие две ели не являются соседними (рябины рядом расти могут). У них оказалось 12 саженцев елей и 5 саженцев рябин. Ребята разделили их так, что каждому досталось некоторое ненулевое количество саженцев. Докажите, что хотя бы один из ребят сможет высадить «красивый» ряд, использовав все свои саженцы.

Решение. Имеем 4 группы, в каждой некоторое количество саженцев ели и рябины. Введем для каждой группы понятие «красота», равное разности между количеством саженцев ели и рябины в этой группе. Общая «красота» набора саженцев равна сумме характеристик «красоты» всех групп и равна 12-5 = 7. Если бы «красота» каждой группы была больше 1, то суммарная красота была бы не меньше 8. Значит хотя бы в одной группе количество саженцев ели превосходит число саженцев рябины не более чем на 1. Значит их можно рассадить в нужном порядке.

Критерии. Любое верное решение - 7 баллов. Возможно решение по принципу Дирихле.

5. На клетчатой плоскости нарисован прямоугольник (границы совпадают с линиями сетки) размерами 2023 на 2025. В одной из его клеток сидит жук, а в центральной клетке прямоугольника находится ловушка. Жук может перемещаться из данной только в клетку, соседнюю с ней по стороне. Сможет ли он пройти таким образом все клетки прямоугольника, не попав в ловушку?

Решение. Введем шахматную раскраску, так что угловые клетки прямоугольника белого цвета. Тогда в самой первой строке белых клеток на 1 больше, чем черных, а в следующей наоборот. Всего строк нечетное количество, поэтому в последней строке, как и во всем наборе, белых клеток на одну больше, чем черных. Центральная клетка первой строки – черная. Она находится в том же столбце, что и центральная клетка прямоугольника, и между ними нечетное число клеток. Значит в центре также черная клетка. Если жук не проходит через клетку с ловушкой, то белых клеток, в которых ему надо побывать, на 2 больше, чем черных. Это невозможно, так как при перемещении цвета клеток чередуются.
Ответ: нет.

Критерии. Любое верное решение - 7 баллов. Правильный ответ без решения - 0 баллов.