

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 8 КЛАССА

Задача 1. У двух рыбаков спросили: «Сколько рыбы в ваших сумках?» «В моей сумке $1/2$ числа рыб, которые находятся в его сумке, и еще 10», — ответил первый. «А у меня в сумке столько рыб, сколько у него, и еще 20», — ответил другой. Сколько рыб у первого рыбака и сколько у второго? Объясните, как был найден ответ.

Ответ. У первого 40 рыб, у второго — 60 рыб. **Решение.** Пусть в сумке второго $2x$ рыб. Тогда у первого, по его словам, $x+10$ рыб, а у второго, по его словам, $(x+10)+20$ рыб. Значит, $(x+10)+20 = 2x$, откуда $x = 30$. Значит, у первого $30+10 = 40$ рыб, а у второго — $2 \cdot 30 = 60$ рыб.

• Верный ответ без всякого объяснения — 0 баллов. Верный ответ с проверкой, если из решения не вытекает, что других ответов нет — 3 балла. Логика решения верна, ответ неверен из-за ошибок в вычислениях — не выше 4 баллов.

• Верный ответ без всякого объяснения — 0 баллов. Верный ответ с проверкой, если из решения не вытекает, что других ответов нет — 3 балла. Логика решения верна, ответ неверен из-за ошибок в вычислениях — не выше 4 баллов.

Задача 2. Целые числа от 1 до 13 разбили на две группы. В каждой из групп все числа перемножили. Оказалось, что одно из полученных произведений делится на другое. Докажите, что частное от этого деления больше 2024.

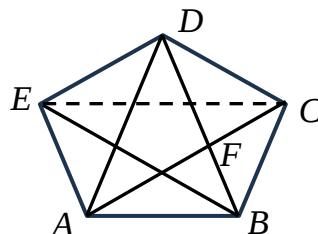
Решение. Пусть произведение A делится на произведение B . Простые числа 7, 11, 13, других кратных которым среди чисел от 1 до 13 нет, должны войти в произведение A . Далее, в произведении всех чисел от 1 до 13 тройка содержится в пятой степени. Поэтому в разложение числа A на простые множители она должна входить по крайней мере в третьей степени, а в разложение числа B — не более, чем во второй. Значит, в разложении на простые множители частного A/B должны содержаться множители 3, 7, 11 и 13, то есть оно не меньше, чем $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 3003 > 2024$.

Задача 3. Докажите, что $\underbrace{22\dots2}_{1012\text{цифр}} + \underbrace{(33\dots3)^2}_{1012\text{цифр}} = \underbrace{11\dots11}_{2024\text{цифры}}$.

Решение. Положим $x = \underbrace{11\dots11}_{1012\text{цифр}}$. Тогда равенство из условия можно переписать в виде $2x+9x^2 = (10^{1012}+1)x$. Поделив обе части полученного равенства на x , получаем $2+9x = 10^{1012}+1 \Leftrightarrow 9x = 10^{1012}-1 = \underbrace{99\dots99}_{1012\text{цифр}}$. Последнее равенство очевидно.

Задача 4. Четыре диагонали выпуклого пятиугольника равны 1. Докажите, что периметр этого пятиугольника меньше 6.

Решение. Пусть все диагонали пятиугольника $ABCDE$, кроме, быть может, диагонали EC , равны 1. Обозначим через F точку пересечения диагоналей AC и BD . По неравенству треугольника $AB < AF+FB$ и $CD < CF+FD$, откуда $AB+CD < AF+CF+FB+FD = AC+BD = 2$ (1). Аналогично, рассматривая диагонали AC и BE , получаем, что $AE+BC < 2$ (2). Наконец, из треугольника DBE получаем $ED < BE+BD < 1+1 = 2$ (3). Осталось сложить неравенства (1), (2) и (3).



Задача 5. При каких целых n , больших 2, можно расставить в клетках таблицы размером $n \times n$ крестики и нолики (в каждой клетке — один знак) так, чтобы в

каждом столбце таблицы, кроме одного, крестиков было больше, чем ноликов, а в каждой строке таблицы, кроме одной, ноликов было больше, чем крестиков?

Ответ. При всех нечетных n . **Решение.** Расстановка крестиков и ноликов в таблице при нечетном n аналогична описанной в решении задачи 5 для 5 класса. Пусть $n = 2k$ чётно. Тогда в каждом из $2k-1$ столбцов таблицы, где крестиков больше, чем ноликов, крестиков должно быть по крайней мере $k+1$. Значит, всего в таблице должно быть по крайней мере $(2k-1)(k+1) = 2k^2+k-1 > 2k^2$ крестиков (так как по условию $n > 2$, то $k > 1$), то есть больше половины общего числа $4k^2$ клеток таблицы. Но из рассмотрения строк таким же образом получается, что больше половины общего числа клеток таблицы должно быть заполнено ноликами. Полученное противоречие показывает, что при чётном n таблицу нужным образом заполнить нельзя.

• Только ответ — 0 баллов. Только частные случаи расстановок — 0 баллов. Только показано, что при всех нечетных n искомые расстановки есть — 3 балла. Только показано, что при всех чётных n искомым расстановок нет — 2 балла.