

Всероссийская олимпиада школьников по математике.

8 класс. Муниципальный этап. 2024 – 2025г.

- 1) Используя каждую из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ровно по одному разу, а также знаки арифметических действий и скобки, получите число 2024. Составлять числа из цифр нельзя.
- 2) В средневековом замке собрались 8 человек: рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, лжецы лгут. Один из собравшихся сказал: здесь нет ни одного рыцаря. Второй сказал: «Здесь не больше одного рыцаря». Третий сказал: «Здесь не более двух рыцарей» и т.д. до восьмого, который сказал: «Здесь не более семи рыцарей». Сколько в замке рыцарей? Ответ обоснуйте.
- 3) Всем хорошо известны легендарные путешествия Синдбада – морехода. Во время одного из путешествий он попадает на небольшой остров, который населяли не только люди, но и фэнтезийные существа и все они жили в мире и согласии. Остров был полон загадок и поэтому на вопрос о количестве жителей на этом острове, ему ответили так: Количество жителей невелико, но оно стремительно растёт. За первый год население (количество людей) возросло на n человек, а за второй на 300 человек. При этом за первый год население увеличилось на 300%, а за второй – на n %. Сколько же сейчас людей населяет остров? (Для справки: речь идёт именно о людях, количество мифических существ на острове не меняется)
- 4) В произвольном треугольнике ABC провели две биссектрисы углов A и C. Из вершины B провели перпендикуляры к этим биссектрисам. Точками P и Q обозначили основания этих перпендикуляров. Докажите, что отрезок PQ – параллелен стороне AC.
- 5) У фальшивомонетчика есть 40 внешне одинаковых монет, среди которых есть 2 фальшивые – они легче, чем остальные и весят одинаково. Как с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь отобрать 20 настоящих монет?

Решение олимпиадных задач и критерии оценивания

Задача №1

Используя каждую из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ровно по одному разу, а также знаки арифметических действий и скобки, получите число 2024. Составлять числа из цифр нельзя.

Решение: $(5 \cdot (7 + 3) \cdot (9 + 1) + 6) \cdot 8 \cdot 2 : 4$

Баллы	Критерии оценивания решения
7	Дан верный ответ с обоснованием (есть способ рассуждений).
6	Дан верный ответ без обоснования.
0	Нет решения.

Задача №2

В средневековом замке собрались 8 человек: рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, лжецы лгут. Один из собравшихся сказал: здесь нет ни одного рыцаря. Второй сказал: «Здесь не больше одного рыцаря». Третий сказал: «Здесь не более двух рыцарей» и т.д. до восьмого, который сказал: «Здесь не более семи рыцарей». Сколько в замке рыцарей? Ответ обоснуйте.

Решение: Ответ: 4

Начнём рассуждения с высказывания восьмого человека: «Здесь не больше 7 рыцарей». Если восьмой – рыцарь, то все хорошо. Если – он лжет, то в комнате 8 рыцарей, что противоречит тому, что восьмой – лжец. Значит, восьмой не может лгать, значит – он рыцарь. Первый сказал, что в комнате нет рыцарей. Но восьмой – рыцарь, поэтому – первый солгал. Значит, первый – лжец. Рассматривая высказывание седьмого человека, получим, что он не может быть лжецом. Иначе в замке должно быть 7 или 8 рыцарей. Но первый – лжец. Поэтому седьмой будет рыцарь. Рассуждая далее аналогично, получим, что второй, третий и четвертый будут лжецами, а шестой и пятый – рыцари. Тогда в замке будет 4 рыцаря.

Баллы	Критерии оценивания решения
7 - 6	Верный ответ с полным подробным решением.
5 - 4	Дан верный ответ, но решение содержит неточности, или недостаточно обосновано, но при этом идея решения понятна и верна.

3 - 2	Дан верный ответ, сделаны попытки кратко обосновать свой ответ, или ответ неверный, но при этом описана идея решения и она верна.
1	Дан верный ответ при отсутствии решения.
0	Дан неверный ответ без обоснования или решение и ответ отсутствуют.

Задача №3

Всем хорошо известны легендарные путешествия Синдбада – морехода. Во время одного из путешествий он попадает на небольшой остров, который населяли не только люди, но и фэнтезийные существа и все они жили в мире и согласии. Остров был полон загадок и поэтому на вопрос о количестве жителей на этом острове, ему ответили так: Количество жителей невелико, но оно стремительно растёт. За первый год население (количество людей) возросло на n человек, а за второй на 300 человек. При этом за первый год население увеличилось на 300%, а за второй – на n %. Сколько же сейчас людей населяет остров? (Для справки: речь идёт именно о людях, количество мифических существ на острове не меняется)

Решение: Ответ: 500 человек

Пусть на острове x жителей. Тогда через год стало $x + n = x + \frac{300}{100} \cdot x = 4x$ жителей, откуда $n = 3x$. еще через год на острове стало $4x + 300 = 4x + \frac{n}{100} \cdot 4x$ жителей. Откуда $300 = \frac{4nx}{100}$. Так как $n = 3x$, то $300 = \frac{12x^2}{100}$, $4x^2 = 10000$; $x = 50$. Значит на острове сейчас $4x + 300 = 500$ человек.

Баллы	Критерии оценивания решения
7	Полное верное решение.
6 - 5	Дан неверный ответ, из – за вычислительные ошибки или описки, недочета. Идея решения понятна и верна.
4 - 3	Ответ верный. Решение содержит незначительные пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после дополнений.(или при наличии вычислительной ошибки)
1	Дан верный ответ при отсутствии решения и сделана проверка по условию задачи.
0	Дан верный ответ при ошибочном решении, или решение и ответ отсутствуют.

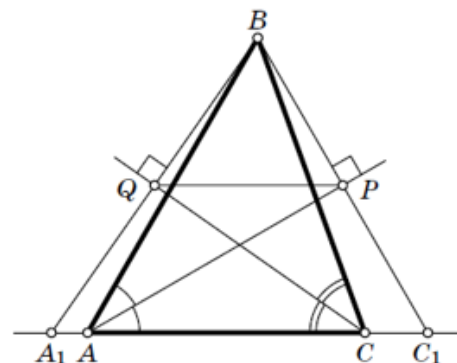
Задача №4

В произвольном треугольнике ABC провели две биссектрисы углов A и C . Из вершины B провели перпендикуляры к этим биссектрисам. Точками P и Q обозначили основания этих перпендикуляров. Докажите, что отрезок PQ – параллелен стороне AC .

Решение:

Продолжим отрезки BQ и BP до пересечения с прямой AC в точках A_1 и C_1 соответственно.

В треугольнике ABC_1 отрезок AP является биссектрисой и высотой. Значит треугольник равнобедренный. $AB = AC_1$. Тогда отрезок AP также является также и медианой. $BP = C_1P$ (P – середина BC_1). Аналогично отрезок CQ является медианой треугольника CBA_1 , то есть Q – середина BA_1 . Следовательно PQ – средняя линия треугольника A_1BC_1 . По свойству средней линии PQ параллельна A_1C_1 . Так как точки A_1 и C_1 лежат на прямой содержащей сторону AC , значит PQ параллельна AC .



Баллы	Критерии оценивания решения
7	Приведено полное логически верное доказательство
6 - 5	Доказательство верное, но содержит недостаточно обоснований
4-3 - 2	Задача не завершена, но есть верные выводы, свидетельствующие о продвижении в решении задачи.
1	Выполнены дополнительные построения и сделан переход к рассмотрению треугольника A_1BC_1
0	Задача не решена

Задача №5

У фальшивомонетчика есть 40 внешне одинаковых монет, среди которых есть 2 фальшивые – они легче, чем остальные и весят одинаково. Как с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь отобрать 20 настоящих монет?

Решение:

Первое взвешивание.

1) Кладём на чашки весов по десять монет.

Если одна из чашек оказывается тяжелее, значит, в другой, лёгкой чашке весов одна, фальшивая монета, или же там обе фальшивые монеты. В тяжёлой же чашке весь десяток монет заведомо уже настоящий.

Второе взвешивание.

2.1) Убираем лёгкие монеты и кладём на их место другой десяток монет из двадцати оставшихся.

Если равновесие, значит и этот новый десяток - настоящие монеты. Набрано двадцать настоящих монет.

Если новый десяток монет опять оказывается лёгким, значит в него попала последняя фальшивая монета (одна другая фальшивая монета выходит, что попадала в первое взвешивание). Тогда берём оставшийся десяток монет, заведомо уже настоящий. Тоже набираем двадцать настоящих монет.

Если же после первого взвешивания весы показывают равновесие, это означает, что оба десятка этих монет настоящие, или в каждый попало по одной фальшивой монете.

Второе взвешивание.

2.2) Заменяем монеты на правой чашке весов на десяток оставшихся монет из двадцати.

Если весы показывают равновесие, то этот десяток монет и два первых десятка монет настоящие, а обе фальшивые остались в последнем не тронутым остатке. Таким образом, мы имеем уже тридцать настоящих монет.

Если левая чашка перетягивает правую чашку, то значит в правой чашке или одна, или две фальшивые монеты, а левая чашка и та чашка из первого взвешивания - содержит настоящие монеты. Тоже набирается двадцать настоящих монет.

Если же перевешивает правая чашка, это значит, что в ней настоящие монеты и оставшийся десяток тоже настоящие монеты. А вот тогда левая чашка и чашка из первого взвешивания содержали по одной фальшивой монете. Тоже набирается двадцать настоящих монет.

Возможны и другие способы рассуждений

<i>Баллы</i>	<i>Критерии оценивания решения</i>
7	Полное верное решение. Рассмотрены все случаи
6-5 - 4	Решение верное, но недостаточно обосновано
1 – 2 - 3	Присутствует идея решения и рассуждений, но решение не учитывает все случаи
0	Решение отсутствует или логически противоречиво