

## 8 класс

1. Найдите наибольшее 10-тизначное число, при вычеркивании из которого любых 5 цифр получается число меньше 52639. (Достаточно написать само число, как находили ответ объяснять не нужно)

*Ответ:* 5222222638.

2. Прошёл турнир по шашкам, в нем участвовали 20 игроков. Каждый сыграл с каждым один раз. Сначала организаторы за победу присуждали 5 очков, за ничью — 1 очко и 0 очков за проигрыш. Так как было много недовольных своим результатом, то начисление баллов сделали другим: за победу — 4 очка, за ничью — 2 очка и 1 очко за проигрыш. Можно ли утверждать, что у каждого участника изменилось набранное им количество очков?

*Ответ:* можно.

*Решение.* Предположим найдется участник, у которого сумма набранных очков не поменялась. Пусть у него было  $x$  побед,  $y$  ничьих и  $z$  поражений, тогда  $5x + y = 4x + 2y + z$  и  $x + y + z = 19$ . Из первого условия получаем, что  $x = y + z$ . Подставляя во второе уравнение получаем, что  $2y + 2z = 19$  — противоречие.

3. На доске записаны числа 2 и 3. Каждую минуту на доску записывают число, равное увеличенному на 1 произведению всех до этого написанных чисел (следующим, например, будет выписано число 7, так как оно равно  $2 \cdot 3 + 1$ ). Могло ли в некоторый момент на доске появиться число, кратное 989? (Не забудьте объяснить свой ответ)

*Ответ:* не могло.

*Решение.* Выпишем несколько первых чисел: 2, 3, 7, 43, .... Заметим, что число 989 делится на 43. Так как на доске выписано число 43, все новые числа не будут делиться на 43, а, значит, и на 989.

4. Внутри прямоугольного треугольника  $ABC$  (с прямым углом  $A$ ) взята произвольная точка  $X$ . Точка  $E$ , лежащая в одной полуплоскости с точкой  $B$  относительно прямой  $CX$ , такова, что  $CX = CE$  и  $\angle XCE = 2\angle ACB$ . Точка  $D$  такова, что вершина  $A$  — середина отрезка  $DX$ .

Докажите, что  $BE = BD$ .

*Решение.* Продлим медиану  $BA$  треугольника  $XBD$  на свою длину.

Получим параллелограмм  $XBDF$ . Тогда  $BD = XF$ .

Значит, нам нужно доказать, что  $XF = BE$ . Докажем, что треугольники  $CEB$  и  $CXF$  равны.

Заметим, что треугольник  $BCF$  равнобедренный, так как  $CA$  — его высота и медиана. Тогда  $BC = CF$  и  $CA$  — биссектриса угла  $BCF$ .

Таким образом,  $\angle BCF = 2\angle ACB = \angle XCE$ . Тогда  $\angle BCE = \angle FCX$ .

По условию  $CE = CX$ .

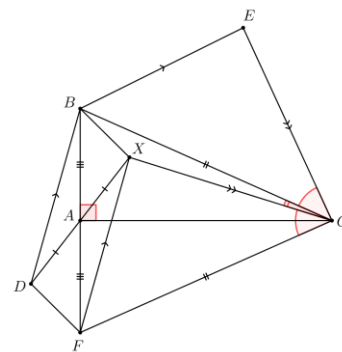
Значит, треугольники  $CEB$  и  $CXF$  равны по первому признаку.

5. Вася и Петя играют в следующую игру. Имеется полоска из  $n > 100$  клеток. Петя первым ходом ставит фишку в любую клетку. Далее они по очереди перемещают фишку в какую-то клетку полоски, в которой фишка еще не была. После каждого хода на доске записывают расстояние, на которое была перемещена фишка. Все числа на доске должны быть различными. Кто не может сделать ход, тот проиграл. Какое наименьшее количество ходов может быть в этой игре? Дайте ответ в зависимости от  $n$ . (Расстояние между клетками — это количество клеток между ними плюс один. Например, расстояние между соседними клетками равно 1)

*Ответ.* Пусть  $n = 3k + r$ , где  $0 \leq r < 3$ , тогда если  $r = 0$ , то ответ  $k+1$ , иначе ответ  $k+2$ .

*Решение.* Пусть  $n = 3k$ . Если совершенно не более  $k$  ходов, то на доске написано не более  $k-1$  чисел, а слева или справа от фишки имеется не менее  $k$  не посещенных клеток, тогда в одну из этих клеток ее можно переместить.

Пример игры на  $k$  ходов. Первые  $k$  ходов делаем в клетки  $k, 1, k-1, 2, k-2, 3, \dots$  только в обратном порядке, чтобы в итоге оказаться на клетке с номером  $k$ . При этом на доске будут



записаны числа от 1 до  $k-1$ . Следующий ход делаем в клетку с номером  $2k$ , на доску записываем число  $k$ .

До крайних не посещенных клеток расстояния будут  $2k-(k+1)=k-1$  и  $3k-2k+2=k$ .

Пусть  $n = 3k+r$ ,  $r>0$ . Если совершенно не более  $k+1$  ходов, то на доске написано не более  $k$  чисел. Если слева или справа от фишки имеется не менее  $k+1$  не посещенных клеток, тогда в одну из этих клеток ее можно переместить. В противном случае и справа и слева будет ровно по  $k$  не посещенных клеток (так как всего не посещенных клеток осталось не менее  $2k$ ). Тогда посмотрим в сторону, из которой сделан последний ход (пусть он был длины  $x$ ), там есть  $k$  вариантов прыжков, и ни один из них не имеет длину  $x$ , то есть если бы все они были запрещены, тогда запрещено не менее  $k+1$  расстояний. Противоречие.

Пример строится аналогично случаю  $n = 3k$ .