Всероссийская олимпиада школьников. Муниципальный этап 2024/25 уч.г.
Математика, 8 класс, решения

Время выполнения 235 мин. Максимальное кол-во баллов – 35

Все задания по 7 баллов

Критерии оценивания заданий

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное (верное) решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям

8.1. Лиза купила новый шампунь. Флакон старого шампуня стоил 200 рублей, а новый стоит на 20% дороже. Но зато флакона хватает на срок в полтора раза дольше. Сколько денег сэкономит Лиза к моменту, когда полностью использует два флакона нового шампуня?
Ответ. 120 рублей.
Решение. Два флакона нового шампуня стоят 480 рублей. Их хватает на тот же срок, что и трёх флаконов старого шампуня, за которые Лиза заплатила бы 600 рублей. Сэкономлено 120 рублей.
Комментарий. *Любое полное решение задачи – 7 баллов. За арифметическую ошибку снимается 3 балла. Приведён только ответ – 0 баллов. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

8.2. Из квадрата, сторона которого является целым числом, вырезали несколько непересекающихся квадратиков размером 1×1. Оказалось, что из вырезанных квадратиков можно составить квадрат. Площадь оставшейся части большого квадрата равна 119. Чему может равняться сторона квадрата, составленного из вырезанных квадратиков?
Ответ. 5 или 59.
Решение. Обозначим стороны квадратов a и b. Тогда $a^2 - b^2 = 119$, $(a-b)(a+b) = 119$. Число 119 раскладывается в произведение множителей двумя способами: $119 = 1 \cdot 119$, $119 = 7 \cdot 17$. Получаем две системы $\begin{cases} a-b=1, \\ a+b=119 \end{cases}$ и $\begin{cases} a-b=7, \\ a+b=17. \end{cases}$ В первом случае $a = 60, b = 59$. Во втором случае $a = 12$, $b = 5$.
Комментарий. *Верное обоснованное решение – 7 баллов. Следующие критерии суммируются. Составлено уравнение $a^2 - b^2 = 119$ – 1 балл; приведено к виду $(a-b)(a+b) = 119$ – 1 балл; число 119 разложено на множители – 1 балл; получены две системы – 2 балла, системы верно решены – 2 балла. Если оба ответа найдены подбором, и не доказано, что других ответов нет – 2 балла. Если подбором найден только один ответ – 1 балл.*

8.3. Число 3576 представлено в виде суммы двух положительных целых слагаемых, которые можно сложить без переноса цифр в следующий разряд. Каким числом способов это можно сделать? Пары слагаемых (a, b) и (b, a) при $a \neq b$ считаются отдельно.

Ответ. 1342.

Решение. Число, соответствующее каждой цифре, должно раскладываться в сумму двух слагаемых. Число 3 можно разложить 4 способами $(0+3,\ 1+2,\ 2+1,\ 3+0)$. Число 5 – 6 способами, число 7 – 8 способами, число 6 – 7 способами. Число 0 не является положительным, поэтому варианты $0+3576$, $3576+0$ не подходят под условие задачи. Итого всего способов $4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 7 - 2 = 1342$.

Комментарий. *Полное обоснованное решение – 7 баллов. В ответе не исключены варианты* $0+3576$, $3576+0$ *– 5 баллов. Верная идея решения, но допущены ошибки при подсчётах числа способов – снимается 1 балл за одну ошибку, 3 балла за две ошибки, 5 баллов за большее число ошибок. Решение начато, есть некоторое продвижение – 1-2 балла. Приведён только ответ – 0 баллов.*

8.4. В треугольнике ABC угол $BAC = 45°$, сторона $AB = 12$. На стороне AB взята точка D так, что $AD = 4$, $\angle BDC = 60°$. Найдите $\angle CBD$.

Ответ. $75°$.

Решение. Опустим из точки B перпендикуляр BK на отрезок CD, и проведём отрезок AK. Угол $DBK = 30°$, поэтому катет $KD = \frac{BD}{2} = 4$, откуда треугольник AKD – равнобедренный, $AD = DK$. Поскольку $\angle ADK = 180° - 60° = 120°$, $\angle AKD = \angle KAD = 30°$. Тогда $\angle KAC = 45° - 30° = 15°$ и $\angle AKC = 180° - 30° = 150°$, $\angle ACK = 180° - 150° - 15° = 15°$. Поэтому треугольник AKC – равнобедренный, $AK = CK$. Но и треугольник AKB – равнобедренный, так как углы при основании AB равны $30°$. Следовательно, $AK = KB$, и поэтому $KB = CK$. Треугольник CBK равнобедренный и прямоугольный, отсюда $\angle CBK = 45°$, а $\angle CBD = 45° + 30° = 75°$.

Комментарий. *Любое полное решение задачи – 7 баллов. Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – до 6 баллов. Если решение не доведено до конца, за доказательство полезных вспомогательных утверждений – 1-2 балла.*

8.5. На каждой стороне каждой из 6 карточек записано по одному числу. Петя выкладывает все карточки в ряд (любой стороной вверх), потом складывает числа, которые он видит на первых трёх карточках слева, и вычитает из них сумму чисел, которые он видит на оставшихся трёх карточках справа.

а) Какое наименьшее число он может получить, если пары чисел на карточках таковы: $(18; 17)$, $(4; 12)$, $(8; 11)$, $(1; 17)$, $(19;\ 5)$, $(7;\ 14)$?

б) Укажите и обоснуйте алгоритм, позволяющий решить такую задачу для любых чисел на $2n$ карточках.

Ответ. а) -38; б) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n - b_{n+1} - b_{n+2} - \cdots - b_{2n},$ где карточки $(a_i;\ b_i)$ упорядочены по неубыванию среднего арифметического a_i, b_i и $a_i \leq\ b_i$.

Решение. б) Запишем числа (a, b) на карточках в порядке возрастания $(a \leq b)$. Легко видеть, что для сложения надо использовать меньшие числа (a), для вычитания – большие числа (b). Упорядочим карточки по возрастанию (неубыванию) среднего арифметического $\frac{a+b}{2}$. Ответом будет являться число

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n - b_{n+1} - b_{n+2} - \cdots - b_{2n.}$$

Обоснование. При замене любого из чисел a_i $(i \leq n)$ на a_k $(k > n)$ сумма изменится на

$$a_k - a_i + b_k - b_i = (a_k + b_k) - (a_i + b_i) \geq 0.$$

а) Следуя алгоритму, получаем

$(a; b)$	$(4; 12)$	$(1; 17)$	$(8; 11)$	$(7; 14)$	$(5; 19)$	$(17; 18)$
$\frac{a+b}{2}$	8	9	9,5	10,5	12	17,5

$$4 + 1 + 8 - 14 - 19 - 18 = -38.$$

Комментарий. *Полное обоснованное решение – 7 баллов. а) Найден верный ответ – 1 балл, ответ обоснован – 1 балл. б) Указан верный алгоритм – 3 балла, алгоритм обоснован – 2 балла; баллы суммируются. Если обоснование ответа в пункте а) допускает обобщение (но оно не сделано), то баллы за эту часть повышаются на 1 балл.*