

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
КУРГАНСКАЯ ОБЛАСТЬ
2024–2025 учебный год
8 класс

Каждое задание оценивается в 7 баллов.

Время выполнения – 235 минут.

Максимальный балл – 35.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное (верное) решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако не рассмотрены отдельные случаи, либо решение содержит ряд ошибок, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка+пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

***Указания к оцениванию задач содержатся также в комментариях к решениям**

При оценивании заданий следует придерживаться указаний, данных в комментариях к данной задаче или к данному способу решению задачи.

Нельзя уменьшать количество баллов за то, что решение слишком длинное. Исправления в работе (зачеркивания ранее написанного текста) также не являются основанием для снятия баллов. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

8.1. В строке четырнадцать клеток, в трёх клетках стоят числа (см. рисунок). В каждую из одиннадцати свободных клеток нужно записать целое положительное число так, чтобы произведение чисел в любых четырёх подряд идущих клетках было равно 120. Какое число может быть записано в закрашенную клетку? Укажите все возможные значения этого числа. Ответ обоснуйте.

		2			4						3		
--	--	---	--	--	---	--	--	--	--	--	---	--	--

Ответ: 5.

Решение. Так как произведение чисел в любых четырёх подряд идущих клетках одинаково, то для любых пяти подряд идущих клеток записанные в крайних клетках числа должны быть одинаковы, так что записанные числа повторяются через три клетки на четвёртую. Поэтому во второй, десятой и четырнадцатой клетках однозначно должно быть записано число 4, в седьмой и одиннадцатой клетках однозначно должно быть записано число 2. Тогда в девятой (закрашенной) клетке должно быть записано число 120: $(2 \cdot 4 \cdot 3) = 5$. Это же число 5 должно быть записано в тринадцатой, пятой и первой клетках. Итого:

5	4	2	3	5	4	2	3	5	4	2	3	5	4
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Комментарии. Только верный ответ – 0 баллов. Только верный ответ с верным примером – 2 балла.

8.2. Из пунктов А и В одновременно выехали велосипедист и мотоциклист соответственно. Через 30 минут велосипедист оказался ровно посередине между А и мотоциклистом. Еще через 5 минут они встретились. Сколько времени велосипедист будет ехать из А в В?

Решение. Расстояние между велосипедистом и мотоциклистом через 30 минут после начала движения равно расстоянию, которое велосипедист проезжает за 30 минут. А поскольку это расстояние велосипедистом и мотоциклистом было преодолено при сближении за 5 минут, то расстояние, которое мотоциклист проезжает за 5 минут, велосипедист проезжает за 25 минут, то есть скорость мотоциклиста в 5 раз больше скорости велосипедиста. Расстояние, которое мотоциклист проехал за 30 минут, велосипедист будет ехать 2,5 часа. Велосипедисту потребуется 3,5 часа, чтобы доехать из А в В.

Критерий оценивания. Получение обоснованного вывода о том, что скорость мотоциклиста в 5 раз больше скорости велосипедиста или аналогичного утверждения, оценивается в 5 баллов. Верно и обоснованно решенная задача оценивается в 7 баллов.

8.3. В круговом турнире (каждая команда играет с каждой) приняли участие 4 команды. За выигрыш в игре команде присуждается 1 очко, за ничью – 0.5, проигравшая команда очков не получает. Оказалось, что команда, занявшая первое место, набрала 3 очка, а команды, занявшие 3 и 4 места набрали одинаковое количество очков, отличное от числа очков команды, занявшей второе место. Сколько очков набрала команда, занявшая второе место?

Ответ: 2

Решение вариант 1: Назовем команды, занявшие 1, 2, 3 и 4 места – соответственно А, В, С, D. Каждая команда сыграла 3 игры. Значит, команда А победила всех соперников, и они в играх с командой А очков не получили. Оставшиеся три команды сыграли между собой три игры. Если команда С победила команду D, то команда С набрала 1 очко, а команда D не получила очков. Чтобы по очкам команды С и D сравнялись, нужно, чтобы D победила команду В. В этом случае команда В не сможет набрать количество очков, большее С и D, что противоречит условию. Аналогично команда D не могла победить команду С. Значит они сыграли вничью. Тогда они должны были одновременно победить, проиграть или сыграть вничью с командой В. Единственный вариант, при котором В получает больше очков, – команда В одновременно побеждает команды С и D, а, значит, она набирает 2 очка.

Решение вариант 2: Назовем команды, занявшие 1, 2, 3 и 4 места – соответственно А, В, С, D. Каждая команда сыграла 3 игры. Значит, команда А победила всех соперников, и они в играх с командой А очков не получили. Оставшиеся три команды сыграли между собой три игры, в которых разыгрывается 3 очка. Так как команда В получила очков больше, чем каждая из команд С и D, то она получила больше 1 очка. Но получить полтора очка она не могла, так как оставшиеся полтора очка нельзя разделить поровну между С и D. Значит команда В получила 2 очка. Вариант, когда это возможно, – команда В побеждает команды С и D, которые сыграли между собой вничью.

Критерии: Полное решение – 7 баллов. Отмечено, что команды В, С, D разыгрывают между собой 3 очка – 1 балл. Только ответ – 0 баллов. Приведен пример, когда команда В набирает 2 очка, но не показано, что этот вариант единственный, – 2 балла.

8.4. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота АН. Оказалось, что $AB + BH = HC$. Докажите, что $\angle ABC$ в два раза больше $\angle ACB$.

Решение. Отметим точку М на продолжении стороны ВС за точку В так, что $AB=BM$. Тогда в равнобедренном треугольнике АВМ внешний угол при вершине В равен сумме двух равных углов при основании АМ, поэтому $\angle ABC=2\angle AMB$. Также равнобедренным является треугольник АМС, поскольку отрезок АН является его высотой и медианой одновременно ($HC=AB+BH=BM+BH=MH$). Тогда $\angle AMB=\angle ACB$ – его углы при основании. Итак, $\angle ABC=2\angle AMB=2\angle ACB$, что и требовалось доказать.

Замечание. Аналогичное решение получается, если отметить на отрезке НС точку N такую, что $BH=HN$. Комментарий. Любое полное решение задачи – 7 баллов. Доказано, что треугольники АВМ и АМС равнобедренные, но дальнейших продвижений нет – 5 баллов. Построена точка М, либо точка N (аналогичная по построению), есть дальнейшие продвижения, но они не приводят к правильному ответу – 2 балла.

8.5. В новосибирском турнире по Counter-Strike команде за победу присуждали 2 очка, за ничью - 1 очко, за поражение - 0 очков. Если по итогам у двух команд одинаковое количество очков, то более высокое место присуждалось той команде, у которой больше разница между выигранными и проигранными раундами (то есть команда, имеющая счет по раундам 104 – 72 будет находиться выше, чем команда, например, с финальным счётом 104 – 95). По итогам одного круга, где каждая команда сыграла с каждой командой победитель набрал 7 очков, второе место заняла команда с пятью, а третье - с тремя очками. Сколько очков могла набрать команда на последнем месте?

Ответ 2 очка.

Решение. Пусть в турнире участвовало n команд, тогда в одном круге они разыграли $n(n-1)$ очко. Последние $n-2$ команды набрали не больше 3 очков каждая, значит $7+5+3(n-2) \geq n(n-1)$, то есть n не больше 5. Посмотрим теперь на победителя. Поскольку он набрал 7 очков, значит он провел хотя бы 4 игры. Значит, команд ровно 5, и количество разыгранных очков равно $5 \cdot 4 = 20$. Теперь, если четвертая команда набрала a очков, а последняя команда b - очков, тогда в сумме они разыграли $15+a+b=20$ очков, то есть $a+b=5$. С учётом того, что $3 \geq a \geq b$, получаем, что $a=3$ и $b=2$.

Пример на два очка строится следующим образом - пусть первая команда выиграет у всех, кроме пятой, а с ней сыграет вничью, вторая команда выиграет у третьей и пятой, ничья с четвертой, третья команда сыграет вничью с четвертой и выиграет у пятой, и четвертая команда сыграет вничью с пятой.

Критерии. Доказано, что команд не больше пяти - 2 балла.

Доказано, что команд ровно 5 - два балла.

Доказано, что у последней команды ровно 2 очка - 1 балл.

Приведён пример - 2 балла. Баллы суммируются.