

8 класс

8.1 На полке лежат коробки с карандашами. В каждой коробке одно и то же число карандашей. Если ученики класса разделят поровну между собой карандаши из двух коробок, то 1 карандаш будет лишним. Если ученики класса разделят поровну между собой карандаши из трех таких коробок, то 13 карандашей будут лишними. Сколько учеников в классе?

Решение:

Заметим, что количество учеников больше 13. Это следует из того, что при делении карандашей из трех коробок, остаются 13 лишних.

Попробуем разделить шесть коробок таких карандашей.

С одной стороны, $6=2+2+2$, поэтому можно три раза делить по две коробки, тогда каждый раз будет оставаться по одному лишнему карандашу, всего лишних карандашей окажется 3. Заметим, что эти 3 карандаша нельзя разделить между учениками, так как учеников больше 13.

С другой стороны, $6=3+3$, поэтому можно дважды разделить по три коробки, тогда каждый раз будет оставаться по 13 лишних карандашей, всего лишних карандашей окажется 26.

Однако было установлено, что при дележе 6 коробок, лишними оказываются 3 карандаша, значит, 26 карандашей можно делить дальше между учениками. Учитывая, что $26-3=23$, делаем вывод, что разделили еще 23 карандаша. Число 23 простое, следовательно, раздать могли только еще по 1 карандашу 23 ученикам.

Ответ: 23 ученика.

8.2 Какое из чисел больше 31^{11} или 17^{14} ?

Решение:

Так как $31^{11} < 32^{11} = 2^{55}$, а $17^{14} > 16^{14} = 2^{56}$, то $31^{11} < 17^{14}$.

Ответ: 17^{14} больше.

8.3 В ряд выписаны сорок пять чисел. Сумма любых четырех из них больше 40. Обязательно ли сумма всех сорока пяти чисел будет больше 450?

Решение:

Произвольно выберем четыре числа из данных сорока пяти чисел. Их сумма больше 40, значит, среди выбранных четырех чисел хотя бы одно число (обозначим его X) больше, чем 10. Действительно, если бы среди выбранных чисел все были меньше или равны 10, то их сумма была бы не более 40.

Рассмотрим все числа, кроме числа X . Их количество равно 44. Разобьем эти 44 числа на четверки. Сумма чисел в каждой четверке больше, чем 40. Всего четверок получится 11, значит, общая сумма 44 чисел будет больше, чем 440.

Учитывая, что 45-м числом является число X , делаем вывод, что общая сумма чисел больше 450.

Ответ: да, обязательно.

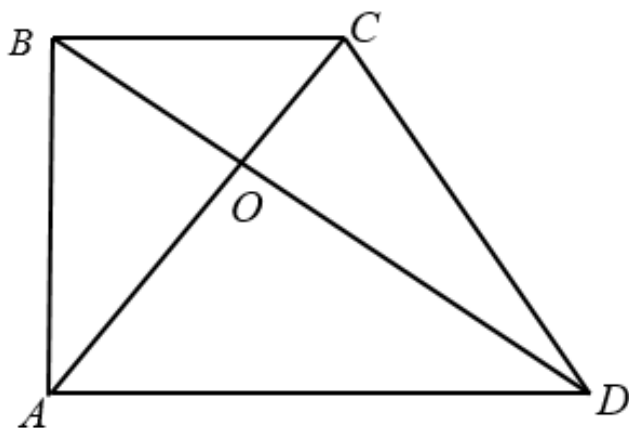
8.4 В некоторой школе города Курска несколько восьмых классов. За год восьмиклассники собирались вместе 40 раз. Каждый раз на такой встрече присутствовало ровно 10 школьников, причем никакие двое из присутствующих не встречались более одного раза. Докажите, что число восьмиклассников в школе больше 60.

Доказательство:

Из присутствующих на каждой встрече можно выбрать $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ пар школьников. Каждая пара школьников могла встретиться не более чем на одной встрече. Всего встреч было 40, следовательно, всего пар школьников существовало не менее $45 \cdot 40 = 1800$. Но из 60 восьмиклассников можно составить только $\frac{60 \cdot 59}{2} = 1770 < 1800$ пар. Следовательно, восьмиклассников в школе больше 60.

8.5 В трапеции $ABCD$ углы A и B прямые. Диагонали трапеции пересекаются в точке O . Боковая сторона AB равна 3 см. Площадь треугольника AOD на 6 см^2 больше площади треугольника BOC . Найдите разность длин оснований трапеции.

Решение:



По условию,

$$S_{AOD} - S_{BOC} = 6,$$

поэтому,

$$(S_{AOD} + S_{AOB}) - (S_{BOC} + S_{AOB}) = 6,$$

Следовательно,

$$S_{ABD} - S_{ABC} = 6,$$

$$\frac{1}{2} AB \cdot AD - \frac{1}{2} AB \cdot BC = 6,$$

$$\frac{1}{2} AB \cdot (AD - BC) = 6,$$

$$AD - BC = 12 : AB,$$

$$AD - BC = 12 : 3,$$

$$AD - BC = 4.$$

Ответ: 4.

Дополнительные критерии

8 класс

8.1 Записан только ответ, ставить 1 балл.

Не обосновано, что 3 карандаша нельзя разделить между учениками, снять 1 балл

8.2 Записан только верный ответ, ставить 0 баллов.

Замечено, что $31 < 32$, а $17 > 16$, но дальнейшее продвижение отсутствует, ставить 1 балл.

8.3 Просто приведен пример, демонстрирующий, что сумма чисел больше 450, ставить 0 баллов.

8.4 Замечено, что количество пар при встрече 45, но продвижение отсутствует, ставить 2 балла.

Пояснено, что комбинаций пар из 60 школьников 1770, но дальнейшего продвижения нет, ставить 1 балл.

8.5 Приведен только ответ, 0 баллов

Рассмотрен некоторый частный случай, удовлетворяющий условию задачи, ставить 0 баллов.