Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2024-2025 уч.год

8 класс

Решения и ответы

1. Найдите все простые числа a и b, для которых выполняется $a^2 - 2b^2 = 1$.

   Решение. Перепишем условие, применим разность квадратов.

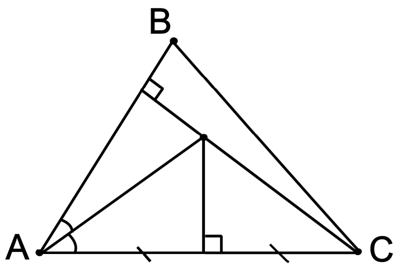
$$a^2 - 1 = 2b^2$$

$$(a-1)(a+1) = 2b^2$$

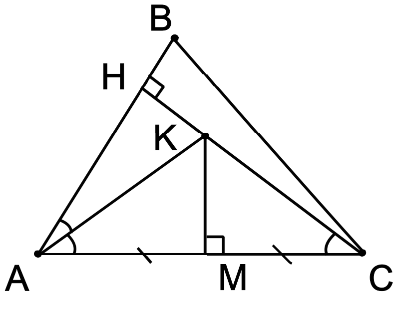
   Число a не может быть равным 2, так как в этом произведении слева будет стоять 3, а справа – четное число. Значит, a – нечетное простое число, и множители $a-1$ и $a+1$ – четные, каждый из них делится на 2. Поэтому произведение $2b^2$ делится на 4, это может быть только при b четном. Получаем $b = 2, a = 3$, это единственное решение.

   Ответ. $a = 3, b = 2$.

2. В треугольнике ABC биссектриса, проведенная из вершины A, высота, проведенная из вершины C, и серединный перпендикуляр к стороне AC пересеклись в одной точке. найдите величину угла A.



   Решение. Обозначения показаны на рисунке. Так как треугольник AKC равнобедренный (KM – серединный перпендикуляр), то $\angle KAC = \angle KCA$. С учетом того, что AK – биссектриса, получаем $\angle KAB = \angle KAC = \angle KCA$.
   В прямоугольном треугольнике AHC три равных угла в сумме дают $90°$: $\angle KAH + \angle KAC + \angle KCA = 90°$. Отсюда $\angle KAB = 30°$, и $\angle A = 60°$.
   Ответ.$\angle A = 60°$.



3. На круглом столе стоят 7 чашек, расположенных симметрично относительно центра: если мысленно повернуть стол на 180°, расположение чашек не изменится. Докажите, что одна чашка стоит в центре стола.

   Решение. Чашки на столе разбиваются на пары взаимно симметричных, переходящих друг в друга при повороте. Так как чашек нечетное количество, то одна из них не имеет пары и при повороте должна переходить сама в себя. Единственная точка, не сдвигающаяся при повороте, это центр стола.

4. Две фирмы ежедневно покупали на бирже топливо в течение месяца. Цена на топливо менялась ежедневно. Средняя цена топлива за месяц оказалась равной 40000 руб. за тонну. Ежедневно первая фирма покупала по одной тонне топлива, а вторая фирма – на 40000 руб. Какая из фирм потратила за месяц больше денег и какая из них купила больше топлива?

   Решение. Пусть в месяце n дней, цена топлива в каждый из дней равна $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$. Средняя цена p вычисляется по определению

$$p = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n}{n}$$

Первая фирма купила каждый день по 1 тонне, и всего затратила сумму S

$$S = p_1 \cdot 1 + p_2 \cdot 1 + p_3 \cdot 1 + \ldots + p_n \cdot 1 = n \cdot p = 40000n$$

Получили, что первая фирма купила n тонн топлива, затратила $40000n$ рублей.

Вторая фирма затратила сумму $40000n$, это сразу следует из условия.

Вторая фирма в первый день купила топлива $V_1 = \dfrac{40000}{p_1}$. Выразим это через среднюю цену, учитывая, что $p = 40000$.

$$V_1 = \frac{p}{p_1} = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n}{n} \cdot \frac{1}{p_1}$$

Аналогично во второй, третий и последующие дни.

$$V_2 = \frac{p}{p_2} = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n}{n} \cdot \frac{1}{p_2}$$

$$V_3 = \frac{p}{p_3} = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n}{n} \cdot \frac{1}{p_3}$$

$$\ldots$$

$$V_n = \frac{p}{p_n} = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n}{n} \cdot \frac{1}{p_n}$$

Сложим все эти равенства, получим

$$V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_n = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n}{n} \cdot \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \ldots + \frac{1}{p_n}\right)$$

Далее будем рассуждать одним из двух способов.

Первый способ рассуждений. Известно неравенство между средним арифметическим и средним гармоническим для n чисел.

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}}$$

Применив это неравенство, получим

$$\frac{p_1+p_2+p_3+\ldots+p_n}{n}\cdot\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\ldots+\frac{1}{p_n}\right)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{n}{\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}+\dfrac{1}{p_3}+\ldots+\dfrac{1}{p_n}}\cdot\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\ldots+\frac{1}{p_n}\right)=n$$

Вторая фирма купила топлива больше, чем n тонн (в неравенстве о средних равенство достигается только в случае, если все слагаемые равны между собой; по условию задачи это не так, цена менялась ежедневно).

Второй способ рассуждений. Упростим произведение

$$V_1+V_2+V_3+\ldots+V_n=\frac{1}{n}\left(p_1+p_2+p_3+\ldots+p_n\right)\cdot\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\ldots+\frac{1}{p_n}\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{p_1}{p_1}+\frac{p_2}{p_1}+\frac{p_1}{p_2}+\frac{p_2}{p_2}+\ldots\right)$$

Здесь написаны первые четыре слагаемых. С учетом известного неравенства $a+\dfrac{1}{a}\geqslant 2$ видим, что

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{p_1}{p_1}+\frac{p_2}{p_1}+\frac{p_1}{p_2}+\frac{p_2}{p_2}+\ldots\right)=\frac{1}{n}\left(1+\frac{p_2}{p_1}+\frac{p_1}{p_2}+1+\ldots\right)\geqslant\frac{1}{n}\left(4+\ldots\right)$$

В произведении мы получим n дробей $\dfrac{p_1}{p_1},\ldots,\dfrac{p_n}{p_n}$ и $\dfrac{n(n-1)}{2}$ пар вида $\dfrac{p_k}{p_m}+\dfrac{p_m}{p_k}$.

Поэтому правая часть может быть оценена с учетом $\dfrac{p_k}{p_m}+\dfrac{p_m}{p_k}\geqslant 2$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{p_1}{p_1}+\frac{p_2}{p_1}+\frac{p_1}{p_2}+\frac{p_2}{p_2}+\ldots\right)\geqslant\frac{1}{n}\left(n+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2\right)=n$$

Это и означает, что вторая фирма купила топлива больше, чем n тонн.

Ответ. Фирмы затратили денег поровну. Вторая купила топлива больше, чем первая.

5. В финальной серии игр хоккейной Лиги играли N команд из восточной группы и $2N$ команд из западной группы. Каждая пара команд сыграла между собой ровно одну игру. Отношение числа игр, выигранных командами из восточной группы, к числу игр, выигранных командами из западной группы равно $\dfrac{7}{5}$, ничьих не было. Найдите минимальное возможное число участников финальной серии игр при этих условиях.

   Решение. Всего в соревнованиях участвовало $3N$ команд. Число сыгранных игр равно числу пар, т.е. $\dfrac{3N(3N-1)}{2}$ (Здесь использован известный факт, что во множестве, содержащем k элементов, существует $\dfrac{k(k-1)}{2}$ различных пар, которые образуют эти элементы.). Так как ничьих не было, количество выигранных игр равно общему количеству игр.

Так как отношение количеств выигранных игр равно $\frac{7}{5}$, то общее количество выигранных игр составляет 12 частей, пусть это $12m$ (m – натуральное число). Отсюда

$$\frac{3N(3N-1)}{2} = 12m$$

$$3N(3N-1) = 24m$$

$$N(3N-1) = 8m$$

Подставляя по очереди $N = 1, 2, 3$, получаем, что наименьшее N – это 3, и число участников финальной серии равно 9.

Ответ. 9.

Продолжительность выполнения заданий – 235 минут.
Максимальное количество баллов за каждую задачу – 7 баллов. Итого 35 баллов за все задание.