РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 8 КЛАССА.

8.1. Роман записал на доске три различных натуральных числа и нашел их произведение. А Андрей каждое из чисел уменьшил на 4 и нашел их произведение. Оказалось, что найденное Андреем произведение на 2024 больше произведения Романа. Какие числа мог написать Роман на доске?

Ответ. **1, 2, 512.**

Решение.
$1\cdot 2\cdot 512 = 1024, -3\cdot(-2)\cdot 508 = 3048$. Разница в точности 2024.

Комментарий. Данный пример является единственным, но доказывать это от участника не требуется.

8.2. На день рождения Малыша мама испекла четыре торта весом 2,1 кг, 2,2 кг, 2,3 кг и 2,4 кг. Карлсон, прилетевший на праздник, решил определить какой из тортов сколько весит при помощи чашечных весов без гирь. Сможет ли он сделать это за 4 взвешивания?

Ответ. **Да, сможет.**

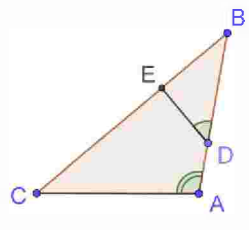
Решение.
Разобьем все торты тремя способами на две группы по два и взвесим их. Очевидно, что дважды перевесит пара с самым тяжелым тортом и дважды недовесит только группа с самым легким тортом. А один раз весы придут в равновесие $(2{,}1 + 2{,}4 = 2{,}2 + 2{,}3)$ Т.е. за три взвешивания Карлсон найдет самый легкий и самый тяжелый торт. Осталось сравнить два торта. За одно взвешивание Карлсон определит какой из них легче. То есть за 4 взвешивания он сможет понять какой торт сколько весит.

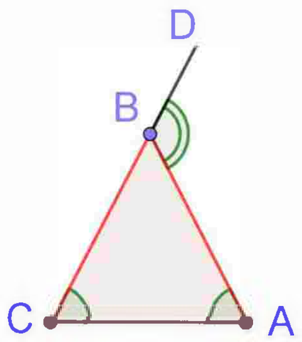
8.3. Докажите, что ребус $\overline{ДАДА}$ + НОД ($\overline{АГАГА}$, $\overline{ДАДА}$) = $\overline{АГАГА}$ не имеет решений (как обычно, разные буквы означают разные цифры).

Решение.

$\overline{ДАДА} + НОД\,(\overline{АГАГА}, \overline{ДАДА}) = \overline{АГАГА} \Leftrightarrow НОД\,(\overline{АГАГА}, \overline{ДАДА}) = \overline{АГАГА} - \overline{ДАДА}$. Тогда правая часть делится на 10, так как оба числа заканчиваются на А. Тогда НОД $(\overline{АГАГА}, \overline{ДАДА})$ делится на 10, и из этого следует делимость $\overline{ДАДА}$ на 10. Тогда $А = 0$. С другой стороны, А является первой цифрой числа $\overline{АГАГА}$, тогда $А \neq 0$, противоречие.

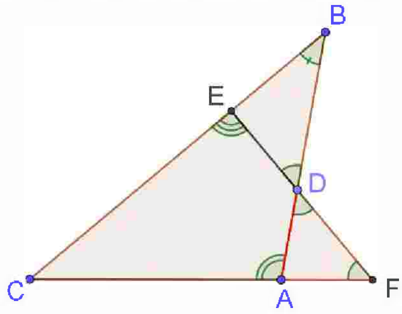
8.4. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC отмечены точки D и E так, что угол BDE в два раза меньше угла BAC. Докажите, что $CE < AC + AD$.





Решение.
Лемма. *Если в треугольнике внешний угол в два раза большего внутреннего, не смежного с ним, то этот треугольник – равнобедренный.*
Доказательство. Пусть в треугольнике ABC внутренний угол $\angle BAC = \alpha$, внешний угол $\angle ABD = 2\alpha$. По теореме о внешнем угле $\angle ACB = \angle ABD - \angle BAC = 2\alpha - \alpha = \alpha$. Значит, в треугольнике ABC углы при основании равны, поэтому он равнобедренный: $AB = BC$.

Дополнительное построение. Пусть F –точка пересечения лучей CA и ED.



$\angle ADF = \angle BDE$ – вертикальные.

По доказанной лемме ΔADF –равнобедренный.

$AC + AD = AC + AF = CF.$

Введём обозначения: $\angle BDE = \angle AFD = \alpha$, $\angle ABC = \beta$.

Рассмотрим ΔBDE. Для него $\angle DEC$ – внешний.

$\angle DEC = \angle BDE + \angle DBE = \alpha + \beta > \alpha.$

Теперь рассмотрим ΔCEF. В нём $\angle CFE = \alpha$, а $\angle CEF > \alpha$. Значит, лежащие напротив этих углов стороны $CF > CE$.

Поэтому $AC + AD > CE$.

8.5. Какое наименьшее количество коней могут побить все клетки доски 7×7, включая клетки, на которых стоят кони? (Сам конь клетку, на которой стоит, не бьёт.)

Ответ. **10.**

Решение.

<u>Пример:</u> Кони на всех клетках третьей и пятой горизонталей, кроме двух крайних в каждой горизонтали (см. рис.1). ***<u>Доказательство оценки:</u>*** Отметим 10 клеток, как на рис.2. Нетрудно проверить, что никакой конь не может побить больше одной отмеченной клетки, значит, надо поставить не менее 10 коней.

	К	К	К	К	К	
	К	К	К	К	К	

рис.1

Х	Х					Х
	Х					Х
Х					Х	
Х					Х	Х

рис.2

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕРКЕ И ОЦЕНКЕ.

8.1. За верный пример – *7 баллов.*

8.2. Замечено, что при взвешивании по два один раз весы придут в равновесие –*2 балла.*
Показано, что за три взвешивания по два торта можно найти самый тяжелый и самый лёгкий – ещё *3 балла.*

8.3. Только доказано, что НОД $(\overline{АГАГА}, \overline{ДАДА})$ делится на 10 – *4 балла.*

Доказано, что А = 0 – 6 *баллов.* Только пояснено, что А ≠ 0 –баллы не начислять.

8.4. Сделано правильное дополнительное построение – *2 балла.*

Использована лемма равнобедренного треугольника – *2 балла.*
Рассмотрен треугольник со стороной, равной сумме отрезков из требуемого неравенства

8.5. За правильный пример – *3 балла.*
За оценку –*4 балла.*